Formula dell'area per superfici regolari

E. Paolini

26 ottobre 2014

Nel seguito indicheremo con $|E| = \mathcal{L}^n(E)$ la misura di Lebesgue di un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$.

1 Formula del cambio di variabili negli integrali multipli

Teorema 1.1. *Sia $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione lineare. Allora per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha*

$$|L(E)| = |\det L| \cdot |E|.$$

Dimostrazione. Procederemo per casi: partendo dai casi più semplici e utilizzando i casi precedenti, si arriverà alla fine al risultato generale.

Caso 1. Mostriamo che il teorema vale se supponiamo che L sia diagonale e che E sia un plurintervallo. Più precisamente $L(x_1, \dots x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ e $E = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. In questo caso l'applicazione lineare manda il plurintervallo in un altro plurintervallo, precisamente:

$$L(E) = [\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1) \times \cdots \times [\lambda_n a_n, \lambda_n b_n).$$

Sappiamo però che la misura di un plurintervallo è il prodotto delle lunghezze degli spigoli che lo compongono, quindi:

$$\begin{aligned} |E| &= |b_1 - a_1| \dots |b_n - a_n| \\ |L(E)| &= |\lambda_1 b_1 - \lambda_1 a_1| \dots |\lambda_n b_n - \lambda_n a_n| \\ &= |\lambda_1| \dots |\lambda_n| \cdot |E| = |\det L| \cdot |E|. \end{aligned}$$

Caso 2. Il teorema vale se L è diagonale ed E è misurabile. Per la definizione di misura esterna di Lebesgue esistono degli insiemi $E_j \supset E$ che sono unione numerabile disgiunta di plurintervalli e tali che $|E| = \lim |E_j|$. Ma allora $L(E) \subset L(E_j)$ quindi

$$|L(E)| \leq |L(E_j)| = |\det L| \cdot |E_j| \to |\det L| \cdot |E|.$$

Se $|\det L| = 0$ abbiamo concluso. In caso contrario L risulta essere invertibile e quindi si può applicare lo stesso ragionamento alla mappa L^{-1} ottenendo la disuguaglianza opposta per l'insieme $F = L(E)$:

$$|L^{-1}(F)| \leq |\det L^{-1}| \cdot |F|$$

e, ricordando che $\det L^{-1} = 1/\det L$, $F = L(E)$ e $L^{-1}(F) = E$, arriviamo alla conclusione voluta.

Caso 3. Il teorema vale se L è una *matrice di permutazione*, ovvero se $L(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ dove $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ è una qualunque permutazione. Infatti osserviamo che L siffatta manda ogni plurintervallo in un plurintervallo in cui le lunghezze degli spigoli sono state permutate tramite σ. Ma la misura di tale plurintervallo rimane invariata. Dunque $|L(E)| = |E|$ se E è un plurintervallo. Con lo stesso ragionamento utilizzato nel caso 2, si estende il risultato a qualunque insieme misurabile. Visto che in questo caso $\det L = \pm 1$, abbiamo ottenuto quanto voluto.

Caso 4. Il teorema vale se L è una applicazione del tipo:

$$L\mathbf{x} = \mathbf{x} + \lambda x_j \mathbf{e}_i$$

con $i \neq j$ indici fissati e $\lambda \in \mathbb{R}$. In pratica la matrice che rappresenta L è l'identità più un valore λ posizionato nella cella i, j fuori dalla diagonale. Chiaramente $\det L = 1$ quindi anche in questo caso dobbiamo dimostrare che la misura di $L(E)$ coincide con la misura di E. Il risultato si ottiene mediante il teorema di Fubini (ovvero il principio di Cavalieri), infatti affettando l'insieme $L(E)$ con i piani $x_i = t$, osserviamo che la mappa L ristretta a tali piani è una traslazione in direzione $\mathbf{e}_j$ di ampiezza λt: $L\mathbf{x} = \mathbf{x} + \lambda t \mathbf{e}_j$. Dunque la misura $(n-1)$-dimensionale di ogni sezione è conservata e così la misura n-dimensionale dell'intero insieme è conservata.

Conclusione. Chiamiamo *elementari* le matrici descritte nei casi 3 e 4. Queste matrici elementari, se moltiplicate a sinistra per una matrice L compiono le operazioni elementari dell'algoritmo di riduzione di Gauss: le matrici del caso 3 permutano le righe di L e le matrici del caso 4 sommano ad una riga il multiplo di un'altra riga. Il metodo di riduzione di Gauss ci permette quindi di trovare matrici elementrari $S_1 \dots S_N$ che, moltiplicate a sinistra, riducono la matrice L prima a scala e poi a diagonale:

$$S_1 \dots S_N L = D.$$

Da un lato visto che il determinante di ogni S_k è ± 1, otteniamo che $\det L = \pm \det D$. D'altro lato, per quanto riguarda la misura dell'immagine di un insieme, visto che per quanto visto sopra vale $|S_k(E)| = |E|$ si ha:

$$|L(E)| = |S_1 \dots S_N(L(E))| = |D(E)| = |\det D| \cdot |E|.$$

Di conseguenza $|L(E)| = |\det L| \cdot |E|$. □

Teorema 1.2 (misura dell'immagine di una mappa regolare)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato, e sia $\Phi\colon \bar{E} \to \mathbb{R}^n$ una mappa iniettiva di classe[1] $\mathcal{C}^1$. Allora si ha*

$$|\Phi(\bar{E})| = \int_{\bar{E}} |\det D\Phi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

1 Ci sarebbe da discutere su cosa significa che una funzione è derivabile in un punto del bordo del suo dominio. In tali punti, infatti, il differenziale potrebbe non essere unico... e la continuità delle derivate parziali potrebbe non essere sufficiente a garantire la continuità della funzione. In alcuni testi si intende che la funzione può essere estesa a tutto un aperto che contiene la chiusura dell'insieme richiedendo che sia differenziabile su tale aperto. In questo teorema è sufficiente che il differenziale esista nei punti interni dell'insieme e che la funzione si possa estendere con continuità sui punti del bordo del dominio.

Idea della dimostrazione. Passo 1. Sia $Q_\rho(\mathbf{x})$ il cubo centrato nel punto $\mathbf{x}$ di lato ρ e con gli spigoli paralleli agli assi coordinati di $\mathbb{R}^n$.

Dimostriamo innanzitutto che per ogni punto $\mathbf{x_0} \in E$ si ha

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|\Phi(Q_\rho(\mathbf{x_0}))|}{\rho^n} = |\det D\Phi(\mathbf{x_0})|.$$

In effetti visto che Φ è differenziabile in $\mathbf{x_0}$ sappiamo che scelta la mappa lineare $L\mathbf{x} = D\Phi(\mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$ si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \frac{|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x_0}) - L(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}|} = 0.$$

Per semplicità supponiamo che $\mathbf{x_0} = \mathbf{0}$ e $\Phi(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$ (a meno di traslazioni lo possiamo fare) e poniamo $Q_\rho = Q_\rho(\mathbf{0})$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste quindi un $\delta > 0$ tale che per ogni $\rho < \delta$ e per ogni $x \in B_\rho$ si ha:

$$|\Phi(\mathbf{x}) - L\mathbf{x}| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} |\mathbf{x}|.$$

Osservando che $|\mathbf{x}| \leq \sqrt{n}\rho$ (visto che $\mathbf{x} \in Q_\rho$) si ottiene dunque che ogni punto dell'insieme $\Phi(Q_\rho)$ si trova ad una distanza inferiore di $\varepsilon\rho$ da un qualche punto dell'insieme $L(Q_\rho)$. Diciamo che $\Phi(Q_\rho)$ è contenuto nell'intorno di raggio $\varepsilon\rho$ dell'insieme $L(Q_\rho)$. Senza entrare nei dettagli[2], questo ci garantisce che per una qualche costante C si abbia

$$|\Phi(Q_\rho)| \leq |L(Q_\rho)| + C\varepsilon\rho^n$$

e dal teorema precedente ricordiamo che $|L(Q_\rho)| = |\rho L(Q_1)| = \rho^n |\det L|$. Dunque

$$\frac{|\Phi(Q_\rho)|}{\rho^n} \leq |\det L| + C\varepsilon.$$

Con un ragionamento simile (erodendo l'insieme $L(Q_\rho)$ di una quantità $\varepsilon\rho$) si potrà ottenere una stima "dal basso" del tipo:

$$\frac{|\Phi(Q_\rho)|}{\rho^n} \geq |\det L| - c\varepsilon.$$

Mettendo assieme le due disuguaglianze, facendo prima tendere $\rho \to 0$ e poi $\varepsilon \to 0$ si ottiene come voluto

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{|\Phi(Q_\rho)|}{\rho^n} = |\det L| = |\det D\Phi(\mathbf{x_0})|$$

Passo 2. Poniamo

$$\theta(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 0} \frac{|\Phi(Q_\rho(\mathbf{x}))|}{\rho^n} = \lim_{\rho\to 0} \frac{|\Phi(Q_\rho(\mathbf{x}))|}{|Q_\rho|}.$$

Nel passo precedente abbiamo mostrato che $\theta(\mathbf{x}) = |\det D\Phi(\mathbf{x})|$. Dalla definizione di limite, per ogni punto $\mathbf{x} \in E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare $r = r(\mathbf{x})$ tale che per ogni $\rho < r$ si abbia

$$-\varepsilon \leq \theta(\mathbf{x}) - \frac{|\Phi(Q_\rho(\mathbf{x}))|}{|Q_\rho|} \leq \varepsilon.$$

2 Si tratta di stimare il volume del contorno di ampiezza $\varepsilon\rho$ di $L(Q_\rho)$ ricoprendolo con cubi di lato dell'ordine di $\varepsilon\rho$. Per motivi dimensional la misura del contorno potrà essere stimata (a meno di costanti) con ε volte il volume dell'intero insieme $L(Q_\rho)$ e quindi con $C\varepsilon\rho^n$

Senza entrare in complicati dettagli[3], diciamo che fissato $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un insieme numerabile di cubi digiunti $Q_j \subset E$ centrati nei punti $\mathbf{x}_j$ che ricoprono quasi ogni punto di E (cioè la misura dell'unione dei cubi è uguale alla misura di E) e tali che:

$$-\varepsilon \leq \theta(\mathbf{x}_j) - \frac{|\Phi(Q_j)|}{|Q_j|} \leq \varepsilon.$$

Consideriamo allora la funzione semplice

$$\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_j \theta(\mathbf{x}_j) \mathbb{1}_{Q_j}(\mathbf{x})$$

e osserviamo che si ha $\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x_j})$ dove $\mathbf{x_j}$ è il centro del cubo Q_j che contiene $\mathbf{x}$. Possiamo senz'altro supporre che per $\varepsilon \to 0$ anche il lato dei cubi tenda a zero cosicché si avrà $\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \to \theta(\mathbf{x}) = |\det D\Phi(\mathbf{x})|$ per ogni $\mathbf{x} \in E$.

Inoltre si ha

$$|\Phi(E)| = \sum_j |\Phi(Q_j)| = \sum_j \theta(\mathbf{x}_j)|Q_j| \pm \varepsilon|Q_j| = \int_E \theta_\varepsilon(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \pm \varepsilon|E|$$

dove con $A \pm B$ intendiamo un valore compreso tra $A - B$ e $A + B$.

Al tendere di $\varepsilon \to 0$, abbiamo già osservato che $\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \to \theta(\mathbf{x})$, inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\mathbf{x} \in E$ si ha $|\theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leq M$ con $M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{E}} \theta(\mathbf{x})$. Abbiamo infatti supposto che $D\Phi$ sia continua e quindi $\theta = |\det D\Phi|$ è pure continua ed essendo $\bar{E}$ compatto tale funzione ammette massimo per il teorema di Weierstraß. Dunque si applica il teorema di convergenza dominata e per $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$|\Phi(E)| = \int_E \theta(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Osserviamo infine che essendo E misurabile si ha $|\partial E| = 0$ e quindi l'integrale fatto su E o su $\bar{E}$ ci dà lo stesso risultato. □

Teorema 1.3 (formula del cambio di variabili)**.** *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, sia* $f \colon \Phi(\bar{E}) \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile. Allora si ha*

$$\int_{\Phi(\bar{E})} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \int_{\bar{E}} f(\Phi(\mathbf{x}))|\det D\Phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$$

Idea della dimostrazione. Se f è una funzione semplice, costante sugli insiemi $F_j = \Phi(E_j)$

$$f(\mathbf{y}) = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{\Phi(E_j)}(\mathbf{y})$$

ci si può ricondurre al teorema precedente:

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi(\bar{E})} f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} &= \int_{\Phi(\bar{E})} \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{F_j}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = \sum_j \alpha_j |\Phi(E_j)| \\
&= \sum_j \alpha_j \int_{E_j} |\det D\Phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\bar{E}} \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(\mathbf{x}) |\det D\Phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \int_{\bar{E}} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

3 Si faccia riferimento al teorema di ricoprimento di Vitali

avendo posto

$$g(\mathbf{x}) = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(\mathbf{x})|\det D\Phi(\mathbf{x})|.$$

Se ora f è integrabile non negativa, per definizione sappiamo che esistono f_k funzioni semplici che convergono decrescendo a f e tali che $\int f_k \to \int f$. Le corrispondenti funzioni g_k risultano anch'esse essere funzioni che convergono decrescendo alla funzione $g(\mathbf{x}) = f(\Phi(\mathbf{x}))|\det D\Phi(\mathbf{x})|$. Dunque per il teorema di Beppo Levi il loro integrale converge all'integrale di g e quindi si ottiene il risultato voluto.

Se f ha segno qualunque, possiamo applicare il passo precedente alla parte positiva e alla parte negativa di f, ottenendo quindi il risultato generale. □

2 FORMULA DELL'AREA

Teorema 2.1. *Sia $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ con $k \leq n$ una applicazione lineare. Allora per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^k$ si ha*

$$|L(E)| = \sqrt{\det L^t L} \cdot |E|$$

dove con $|L(E)|$ intendiamo la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^k(R(L(E)))$ con R una qualunque isometria che manda $\mathrm{Im}L$ in $\mathbb{R}^k$.

Dimostrazione. Sia $R\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una applicazione lineare che ristretta a $\mathrm{Im}L$ risulti essere una isometria. Questo significa che, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ si ha

$$|RL\mathbf{v}| = |L\mathbf{v}|$$

ovvero, elevando al quadrato,

$$\mathbf{v}^t L^t R^t RL\mathbf{v} = \mathbf{v}^t L^t L\mathbf{v}$$

e portando tutto al primo membro:

$$\mathbf{v}^t(L^t R^t RL - L^t L)v = 0.$$

Ma se M è una matrice simmetrica e $\mathbf{v}^t M\mathbf{v} = 0$ per ogni $\mathbf{v}$, per il principio di identità delle forme quadratiche[4] si ottiene che $M = 0$, dunque otteniamo

$$L^t R^t RL = L^t L.$$

Osserviamo ora che

$$|R(L(E))| = |\det RL| \cdot |E|$$

e, per quanto osservato poco sopra,

$$|\det RL| = \sqrt{\det L^t R^t RL} = \sqrt{\det L^t L}.$$

□

4 Basta osservare che

$$(x-y)^t M(x-y) = x^t Mx + y^t My - 2x^t My$$

da cui

$$x^t My = \frac{x^t Mx + y^t My - (x-y)^t M(x-y)}{2}.$$

Dunque se $v^t Mv = 0$ per ogni v, il membro di destra è sempre nullo e quindi anche $x^t My$ è nullo per ogni x e y. Dunque M è la matrice nulla.

Il teorema precedente giustifica la seguente definizione.

Definizione 2.2 (area di una superficie)**.** *Una funzione iniettiva* $\Phi\colon E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *si dice essere una* k-superficie parametrizzata. *Se* Φ *è di classe* C^1, *definiamo l'area della superficie parametrizzata da* Φ *con la seguente formula:*

$$\mathcal{A}(\Phi(E)) = \int_E J(D\Phi(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$$

dove

$$J(L) = \sqrt{\det L^t L}$$

si chiama jacobiano *o* elemento d'area *associato alla mappa lineare* L.

Se $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è una funzione definita su un insieme* $\Omega \supset \Phi(E)$ *e se* $f \circ \Phi$ *è una funzione integrabile su* E, *definiamo l'integrale di superficie:*

$$\int_{\Phi(E)} f(\mathbf{y})\,d\sigma(\mathbf{y}) = \int_E f(\Phi(\mathbf{x}))J(D\Phi(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

La notazione $d\sigma(\mathbf{y})$ *sta a rappresentare l'elemento d'area nell'integrazione rispetto alla variabile* $\mathbf{y}$. *Formalmente si ha quindi* $d\sigma(\mathbf{y}) = J(D\Phi(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$ *quando* $\mathbf{y}$ *varia sulla superficie* $\Phi(E)$.

Esempio 2.3 (area della superficie sferica). La superficie di una sfera di raggio R può essere descritta tramite due coordinate θ, ϕ che rappresentano la *longitudine* e la *latitudine*. La relazione tra le coordinate cartesiane x, y, z e le coordinate sferiche ρ, θ, ϕ è:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi\cos\theta \\ y = \rho\cos\phi\sin\theta \\ z = \rho\sin\phi. \end{cases}$$

Se $\rho = R$ è fissato, otteniamo una mappa Φ definita sul rettangolo $E = \{(\theta,\phi)\colon \theta \in [-\pi,\pi], \phi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$

$$\Phi(\theta,\phi) = R(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi).$$

La matrice jacobiana di Φ è

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi} \end{pmatrix} = \begin{matrix} -R\cos\phi\sin\theta & -R\sin\phi\cos\theta \\ R\cos\phi\cos\theta & -R\sin\phi\sin\theta \\ 0 & R\cos\phi \end{matrix}$$

e quindi

$$D\Phi^t D\Phi = R\begin{pmatrix} R^2\cos^2\phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$J(D\Phi) = \sqrt{\det D\Phi^t D\Phi} = R^2\cos\phi.$$

Possiamo quindi calcolare l'area della sfera $S = \Phi(E)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S) &= \int_E R^2\cos\phi\,d\theta\,d\phi = \int_{-pi}^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi R^2\cos\phi \\ &= 2\pi R^2\big[\sin\phi\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Esempio 2.4 (baricentro di una semisfera). Si consideri la semisfera S consistente dei punti $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano le relazioni: $|\mathbf{x}| = R$, $x_3 \geq 0$. Vogliamo calcolare

$$\int_S x_3 \, d\sigma(\mathbf{x}).$$

Parametrizziamo la sfera in coordinate... sferiche θ, ϕ:

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\phi\cos\theta \\ x_2 = R\cos\phi\sin\theta \\ x_3 = R\sin\phi \end{cases}$$

per cui posto $\Phi(\theta,\phi) = R(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi)$ si ha $S = \Phi(E)$ dove E è il rettangolo $E = \{(\theta,\phi)\colon -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$.

Dunque

$$\begin{aligned}\int_S x_3 \, d\sigma(\mathbf{x}) &= \int_E R\sin\phi R^2 \cos\phi \, d\theta d\phi = R^3 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \sin\phi\cos\phi \\ &= 2\pi R^3 [\frac{1}{2}\sin^2\phi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^3.\end{aligned}$$

Sapendo che l'area della semisfera è $\mathcal{A}(S) = 2\pi R^2$, si trova la coordinata $\bar{x}_3$ del baricentro:

$$\bar{x}_3 = \frac{\int_S x_3 \, d\sigma}{\mathcal{A}(S)} = \frac{\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{1}{4}R.$$

Teorema 2.5 (formula di Cauchy-Binet). *Sia L una matrice $n \times k$ con $k \leq n$. Allora*

$$\det L^t L = \sum_{M \text{ minore } k \times k \text{ di } L} \det(M)^2.$$

La somma viene fatta al variare di M tra tutte le sottomatrici di L che si possono ottenere eliminando $n - k$ righe a scelta.

Non dimostrazione. La dimostrazione può essere fatta per verifica diretta per $k \leq n \leq 3$. La dimostrazione del caso generale è piuttosto complessa, e richiede di espandere il determinante come somma su tutte le permutazioni di k elementi. □

Esempio 2.6 (area del grafico). Sia $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. La superficie che rappresenta il grafico di f può essere parametrizzata tramite $\Phi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})).$$

Allora si ha

$$D\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}d \\ Df(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Applicando la formula di Cauchy-Binet si ottiene:

$$\det(D\Phi^t D\Phi) = \sqrt{1 + |Df|^2}$$

e dunque:

$$\mathcal{A}(\Phi) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Df(\mathbf{x})|^2}\, d\mathbf{x}.$$

3 IL PRODOTTO VETTORIALE

Nel caso di superfici $\Phi\colon E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ possiamo rappresentare lo jacobiano della trasformazione, e altre proprietà geometriche della superficie, mediante il prodotto vettoriale.

Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$, definiamo il loro *prodotto triplo* come:

$$det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

cioè consideriamo il determinante della matrice le cui colonne sono i tre vettori dati. Osserviamo che questo può essere fatto solo perché abbiamo $n = 3$ vettori in $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto tripolo ha le proprietà del determinante: è multi-lineare (cioè lineare in ognuno dei tre vettori in ingresso) e alternante (cioè scambiando due vettori il prodotto triplo cambia segno).

Se fissiamo due dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e lasciamo variare il terzo $\mathbf{w}$ otteniamo una funzione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{w} \mapsto \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Ogni applicazione lineare può essere rapresentata tramite prodotto scalare con un vettore di $\mathbb{R}^3$. Definiamo quindi il *prodotto vettoriale* tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ che indichiamo con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ (notazione alternativa: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$) il vettore che soddisfa la seguente relazione:

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Dalle proprietà di antisimmetria del determinante, osserviamo che:

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0, \qquad (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

che significa che il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è perpendicolare sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$ cioè è perpendicolare al piano individuato dai due vettori.

Osserviamo inoltre che il prodotto triplo è invariante per movimenti rigidi, cioè se applichiamo una stessa rotazione a tutti e tre i vettori, il prodotto triplo non cambia (in quanto stiamo moltiplicando la matrice $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ per una matrice con determinante 1).

In particolare se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono tra loro ortogonali li possiamo ruotare in modo che le 3 direzioni risultino parallele agli assi coordinati. La matrice diventa quindi diagonale e il valore assoluto del determinante risulta essere il prodotto dei moduli dei tre vettori. In particolare se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono ortogonali si ha $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ in quanto risulta $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$.

Definito l'angolo α in base alla formula

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \cos\alpha,$$

e posto

$$\lambda = \frac{|\mathbf{v}| \cos\alpha}{|\mathbf{u}|} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}|^2}$$

visto che (per antisimmetria) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$, si ha:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} - \lambda \mathbf{u})$$

ed essendo $\mathbf{u}$ ortogonale a $\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}$ (verificare facendo il prodotto scalare!), si ottiene

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}|$$

ma

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u}|^2 &= |v|^2 + \lambda^2 |\mathbf{u}|^2 - 2\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |v|^2 + |v|^2 \cos^2\alpha - 2|\mathbf{v}|^2 \cos^2\alpha \\ &= |v|^2 \sin^2\alpha \end{aligned}$$

e in conclusione

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,|\sin\alpha|.$$

Per calcolare le coordinate (componenti) di un prodotto vettore osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^{3} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{e_i})\mathbf{e_i} = \sum_{i=1}^{3} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e_i})\mathbf{e_i} \\ &= \det\begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \mathbf{e_1} - \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \mathbf{e_2} + \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \mathbf{e_3} \end{aligned} \tag{1}$$

che porta alla formula *mnemonica*:

$$\text{“}\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \mathbf{e_1} \\ u_2 & v_2 & \mathbf{e_2} \\ u_3 & v_3 & \mathbf{e_3} \end{pmatrix}\text{”}$$

giustificata dal fatto che la linearità del determinante sull'ultima colonna ci dà, formalmente, la (1).

Osserviamo infine che se $L = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ è la matrice 3×2 le cui due colonne sono i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, si ha

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = J(L). \tag{2}$$

Questa può essere considerata una applicazione del Teorema Cauchy-Binet enunciato più sopra. Infatti abbiamo visto in (1) che le componenti del vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sono proprio (a meno del segno) i deteminanti dei tre minori 2×2.

Senza usare il Teorema di Cauchy-Binet (che non abbiamo dimostrato) si può dimostrare (2) come segue. Scegliamo il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ si ha

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|^2 |\mathbf{w}|^2 = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{w})^2 = \big(\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\big)^2 = \det\big((\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})^t (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})\big) \\
= \det \begin{pmatrix} L & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & |\mathbf{w}|^2 \end{pmatrix} = \det(L^t L) |\mathbf{w}|^2 = (J(L))^2 |\mathbf{w}|^2.
\end{aligned}
$$

Se $\Phi \colon E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione $\mathcal{C}^1$ di una superficie, indicando con u, v le variabili in $\mathbb{R}^2$ e con x, y, z le variabili in $\mathbb{R}^3$ cosicché la superficie corrisponde all'equazione:

$$(x, y, z) = \Phi(u, v)$$

la matrice jacobiana di Φ può essere scritta nei seguenti modi:

$$
D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{pmatrix}.
$$

Gli integrali di superficie possono quindi essere scritti nel seguente modo:

$$
\int_{\Phi(E)} f \, d\sigma = \int_E f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du \, dv
$$

dove l'espressione formale

$$
d\sigma = \left| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right| du \, dv
$$

rappresenta quindi l'elemento *infinitesimo* di area sulla superficie $\Phi(E)$.

Cerchiamo ora di dare un significato *geometrico* alla direzione del vettore $\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}$. Osserviamo innanzitutto che il rango della matrice jacobiana $D\Phi$ è massimo (cioè 2) se e solo se $\xi \neq 0$. Infatti il rango è zero se e solo se i due vettori colonna di $D\Phi$ sono uno il multiplo dell'altro: ma in tal caso il loro prodotto vettore risulta essere nullo. Se invece i due vettori hanno direzioni diverse, il prodotto vettore risulta essere diverso da zero.

Se il rango della matrice $D\Phi$ è massimo, potremo definire il piano tangente alla superficie $\Phi(E)$ nel punto $\Phi(u, v)$ come l'immagine della applicazione lineare associata alla matrice jacobiana $D\Phi(u, v)$ ovvero come lo spazio generato dai due vettori colonna. Dunque dalle proprietà del prodotto vettore osserviamo che il vettore ξ è ortogonale al piano tangente e può quindi essere utilizzato per identificare la direzione *normale* alla superficie.

REGISTRO MODIFICHE

2014-10-17 Prima stesura.

2014-10-26 Aggiunto prodotto vettore e altri aggiustamenti.