Linearizzazione del campo gravitazionale (introduzione alla derivata)

Analisi Matematica 1
Fisica a.a. 2015-2016

30 ottobre 2021

Il campo gravitazionale generato dalla terra nello spazio, in un punto a distanza r dal suo centro è dato da:

$$U(r) = -\frac{GM}{r}$$

dove M è la massa della terra e G è la costante di gravitazione universale. La funzione $U(r)$ non è affatto lineare. Se però consideriamo il campo gravitazionale per i punti in prossimità della superficie terrestre, ci aspettiamo un comportamento approssimativamente lineare. Proviamo a esplicitare questa idea.

Supponiamo di trovarci ad altezza h dalla superficie terrestre. Ci troveremo allora a distanza $R+h$ dal centro della terra. Si avrà allora:

$$U(R+h) = -GM\frac{1}{R+h}.$$

Osserviamo ora che si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R+h} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} + \frac{R-(R+h)}{R(R+h)} \\
&= \frac{1}{R} - \frac{h}{R(R+h)} \\
&= \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} - \frac{h}{R(R+h)} + \frac{h}{R^2} \\
&= \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2} - \frac{hR - h(R+h)}{R^2(R+h)} \\
&= -\frac{h}{R^2} + \frac{1}{R} + \frac{h^2}{R^2(R+h)}.
\end{aligned}$$

Dunque si avrà

$$\begin{aligned}
U(R+h) &= \frac{GM}{R^2}h - \frac{GM}{R} + \omega(h) \\
&= gh + C + \omega(h)
\end{aligned}$$

dove $g = GM/R^2$, C è una costante (irrilevante perché il potenziale può essere definito a meno di una costante) e $\omega(h)$ è una funzione con la proprietà $\omega(h)/h \to 0$ per $h \to 0$. Dunque se h è molto piccolo rispetto a R, il termine $\omega(h)$ è trascurabile rispetto al termine gh (anche se entrambi tendono a zero per $h \to 0$). Questo giustifica l'utilizzo della formula semplificata:

$$U_0(h) = gh$$

da cui l'energia potenziale $E = mgh$ se abbiamo una massa m ad una altezza h sulla superficie terrestre.

Una volta introdotte le derivate vedremo che quello che abbiamo determinato è la formula:

$$U(R+h) = U(R) + U'(R)h + \omega(h).$$