# Appunti di Analisi Superiore (ver. 0.9)

E. Paolini

1 ottobre 2017

INDICE

# 1

# INTRODUZIONE

Estratto da: encyclopedia of Mathematics.

> Generalized function A mathematical concept generalizing the classical concept of a function. The need for such a generalization arises in many problems in engineering, physics and mathematics. The concept of a generalized function makes it possible to express in a mathematically-correct form such idealized concepts as the density of a material point, a point charge or a point dipole, the (space) density of a simple or double layer, the intensity of an instantaneous source, etc. On the other hand, the concept of a generalized function reflects the fact that in reality a physical quantity cannot be measured at a point; only its mean values over sufficiently small neighbourhoods of a given point can be measured. Thus, the technique of generalized functions serves as a convenient and adequate apparatus for describing the distributions of various physical quantities. Hence generalized functions are also called distributions.
>
> Generalized functions were first introduced at the end of the 1920-s by P.A.M. Dirac in his research on quantum mechanics, in which he made systematic use of the concept of the $\delta$-function and its derivatives (see Delta-function). The foundations of the mathematical theory of generalized functions were laid by S.L. Sobolev in 1936 by solving the Cauchy problem for hyperbolic equations, while in the 1950-s L. Schwartz gave a systematic account of the theory of generalized functions and indicated many applications. The theory was then intensively developed by many mathematicians and theoretical physicists, mainly in connection with the needs of theoretical and mathematical physics and the theory of differential equations. The theory of generalized functions has made great advances, has numerous applications, and is extensively used in mathematics, physics and engineering.

Le distribuzioni vengono storicamente interpretate come limiti (in un senso che ora specificheremo) delle usuali funzioni. Pensiamo ad esempio ad un elettrone come ad una carica distribuita su una palla di raggio che tende a zero. Se il limite fosse una funzione, questa funzione dovrebbe avere valore nullo dappertutto tranne nel punto in cui si trova l'elettrone, dove invece dovrebbe avere valore infinito. Ma il suo integrale dovrebbe avere un valore finito, fissato (la carica dell'elettrone). Per ottenere questo, si pensa alle distribuzioni come a "funzioni generalizzate" ovvero funzioni che non hanno un valore puntuale ben definito, ma che possono essere integrate. In generale per una distribuzione $f$ e per una funzione regolare $\varphi$, si vuole che abbia senso l'integrale $\int f\varphi$ esteso a tutto lo spazio. Per avere una classe più ampia possibile di funzioni generalizzate $f$ dobbiamo imporre alle funzioni $\varphi$ di variare in una classe più piccola possibile di funzioni regolari: si sceglie dunque $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, le funzioni derivabili infinite volte e a supporto compatto nello spazio di riferimento $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Il funzionale $\varphi \mapsto \varphi[f] \int f\varphi$ è chiaramente lineare in $\varphi$, vorremmo però anche esprimere il fatto che tale funzionale deve essere continuo. Per fare ciò dobbiamo avere una topologia sullo spazio $C_c^\infty(\Omega)$.

La convergenza che vorremmo avere: una successione $\varphi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ converge ad una funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che il supporto di tutte le funzioni $\varphi_k$ e $\varphi$ è in $K$ e tutte le derivate di ogni ordine delle funzioni $\varphi_k$ convergono uniformemente alle corrispondenti derivate della funzione $\varphi$ (compreso l'ordine 0 ovvero le funzioni stesse).

Vorremmo anche fare in modo che le distribuzioni ammettano sempre derivate. Per questo è sufficiente definire le distribuzioni come funzionali lineari $f\colon C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ e imporre le formule di integrazione per parti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}[\varphi] = -f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)$$

lasciandosi guidare dal caso delle funzioni derivabili

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\,dx.$$

## 1.1 IL POTENZIALE DI NEWTON

Cerchiamo una soluzione radiale $u(x) = v(|x|)$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dell'equazione $\Delta u = 0$. [2, 4.8 A pag. 86] Osserviamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = v'\frac{\partial}{\partial x_k}|x| = v'\frac{x_k}{|x|}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2} = v''\frac{x_k^2}{|x|^2} + v'\frac{|x| - x_k\frac{x_k}{|x|}}{|x|^2} = v''\frac{x_k^2}{|x|^2} + v'\frac{|x|^2 - x_k^2}{|x|^3}$$

dunque

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{(\partial x_k)^2} = v'' + v'\frac{n|x|^2 - |x|^2}{|x|^3} = v'' + v'\frac{n-1}{|x|} = \frac{\partial^2 u}{(\partial\rho)^2} + \frac{n-1}{\rho}$$

avendo posto $\rho = |x|$.

Dunque l'equazione $\Delta u = 0$ diventa $v'' + \frac{n-1}{\rho}v' = 0$. Moltiplicando per $\rho^{n-1}$ si ottiene

$$0 = v''\rho^{n-1} + (n-1)\rho^{n-2}v' = (v'\rho^{n-1})'$$

da cui
$$v' = \frac{c}{\rho^{n-1}}$$
ovvero
$$v(\rho) = \begin{cases} c \log \rho + d & \text{per } n = 2 \\ c\frac{2-n}{\rho^{n-2}} + d & \text{per } n \geq 3. \end{cases}$$

Dunque la funzione
$$u(x) = \begin{cases} \log |x| & \text{per } n = 2 \\ \frac{2-n}{|x|^{n-2}} & \text{per } n \geq 3 \end{cases}$$
risolve $\Delta u = 0$ ed ha le proprietà
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{|x|^{n-1}}.$$

Osserviamo che la funzione $u$ appena definita è un elemento di $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e dunque può essere considerato un elemento di $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Calcoliamo $\Delta u$ in senso distribuzionale. Sia $\varphi$ una funzione regolare con supporto in $B_R$. Si ha allora:
$$(\Delta u, \varphi) = (-1)^2(u, \Delta\varphi) = \int_{B_R} u(x)\Delta\varphi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} u\Delta\varphi.$$
Posto $\Omega = B_R \setminus B_\varepsilon$ ricordando che in $\Omega$ vale $\Delta u = 0$ si ha
$$u\Delta\varphi = u \operatorname{div} \nabla\varphi = \operatorname{div}(u\nabla\varphi) - (\nabla u, \nabla\varphi)$$
e, analogamente
$$\varphi\Delta u = \operatorname{div}(\varphi\nabla u) - (\nabla u, \nabla\varphi).$$
Facendo la differenza e ricordando che $\Delta u = 0$ si ha
$$u\Delta\varphi = \operatorname{div}(u\nabla\varphi - \varphi\nabla u).$$
Dunque
$$\begin{aligned} \int_\Omega u\Delta\varphi &= \int_{\partial\Omega} \left( u\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial u}{\partial n} \right) \\ &= -\int_{\partial B_\varepsilon} u\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi\frac{\partial u}{\partial\rho} \\ &= -v(\varepsilon)\int_{\partial^+ B_\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + v'(\varepsilon)\int_{\partial^+ B_\varepsilon} \varphi \\ &= -v(\varepsilon)O(\varepsilon^n) + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}(\sigma_n\varepsilon^{n-1}\varphi(0) + o(\varepsilon^{n-1})) \to \sigma_n\varphi(0) \end{aligned}$$
per $\varepsilon \to 0^+$ (dove $\sigma_n = n\omega_n$ è la misura della sfera $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$). Dunque
$$\Delta u = \sigma_n \delta$$
e se definiamo la distribuzione
$$u_0 = \frac{u}{\sigma_n} = \begin{cases} \frac{\log|x|}{2\pi} & \text{per } n = 2 \\ \frac{2-n}{\sigma_n |x|^{n-2}} & \text{per } n \geq 3 \end{cases}$$

abbiamo che $\Delta u_0 = \delta$ (per $n = 1, 2, \dots$). La distribuzione $u_0$ si dice *soluzione fondamentale* dell'operatore di Laplace.

*soluzione fondamentale laplaciano*

Se ora vogliamo risolvere l'equazione $\Delta u = \rho$ sarà sufficiente sfruttare l'additività dell'equazione (principio di sovrapposizione). Scrivendo $\rho$ come integrale

$$\rho = \int \rho(y) \delta_y \, dy$$

fare la convoluzione di $u_0$ con $\rho$. Infatti, posto $u = u_0 * f$ si avrà

$$\Delta u = \Delta(u_0 * f)$$

# 2 SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

Sia $V$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ oppure sul campo $\mathbb{R}$. Una topologia su $V$ è compatibile con la struttura di spazio vettoriale se rende continue le due operazioni dello spazio vettoriale (somma e prodotto per scalare). Richiediamo inoltre (come fa Rudin, ma non sempre viene richiesto) che l'insieme $\{0\}$ sia chiuso. Vedremo tra poco che $\{0\}$ chiuso equivale a richiede che la topologia sia di Hausdorff (punti distinti hanno intorni distinti). Si dirà che $V$ è uno spazio vettoriale topologico o brevemente: s.v.t.

*spazio vettoriale topologico*

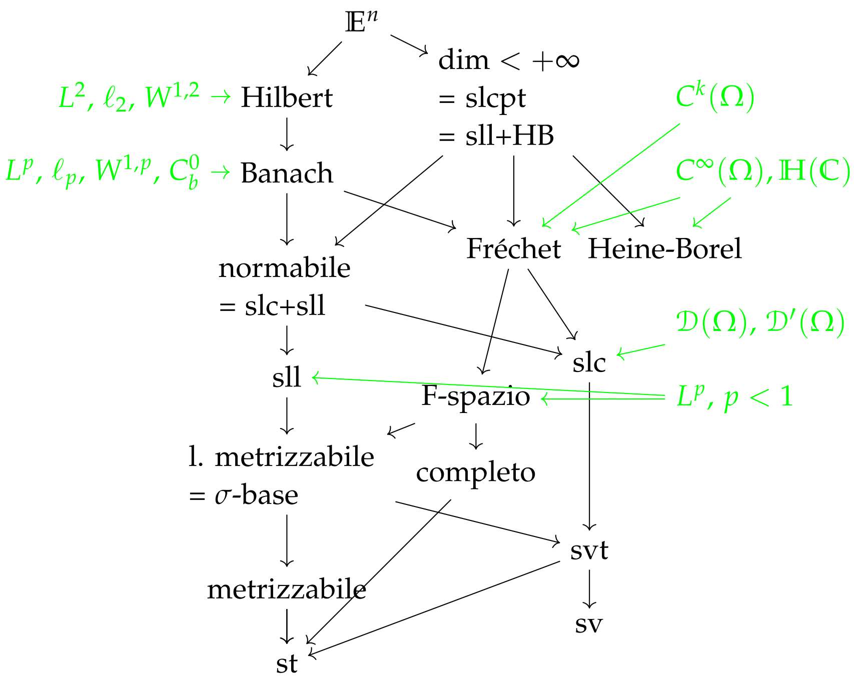
La topologia di uno svt è invariante per traslazioni e per riscalamenti. In particolare le traslazioni $\tau_x(y) = x + y$ e le omotetie $\lambda_c(x) = cx$ con $c \neq 0$ sono omeomorfismi dello spazio vettoriale topologico. (Ma questo non basta a rendere continue le due operazioni!) Questo significa che gli intorni di un punto $x$ sono i traslati degli intorni del punto 0. Dunque l'intera topologia è determinata dagli intorni di 0.

Gli esempi migliori di spazi vettoriali topologici sono gli spazi normati (in particolare Banach e Hilbert) dove la topologia adottata è la topologia meno fine che rende continua la norma. Dunque l'intera topologia è generata dalle traslazioni e riscalamenti della palla unitaria aperta.

*sp. normato*

## 2.1 TIPI DI SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI:

- slc: spazio localmente convesso (ogni punto ha una base di intorni convessi);
- sll: spazio localmente limitato (ogni punto ha almeno un intorno limitato);
- slcpt: spazio localmente compatto (ogni punto ha un intorno con chiusura compatta);
- metrizable (c'è una metrica che induce la topologia);
- $F$-spazio (c'è una metrica completa e invariante che induce la topologia);
- Fréchet space ($F$-spazio localmente convesso);
- normato (la topologia è indotta da una norma);
- Banach (normato, completo);
- ha la proprietà di Heine-Borel (ogni chiuso e limitato è compatto);
- bornologico: è uno slc tale che ogni insieme convesso, bilanciato e bornivoro è un intorno di 0. (bornivoro significa che per ogni




insieme limitato c'è un riscalamento dell'insieme che contiene il limitato).

In generale un insieme $E$ in uno s.v.t. $V$ si dice *limitato* se è contenuto in un opportuno riscalamento di qualunque intorno dello 0. Cioè $B$ è limitato se per ogni $U$ intorno di 0 esiste $r > 0$ tale che $B \subset rU$. Osserviamo che è possibile che ogni intorno di 0 sia illimitato, questo *limitato* ad esempio in tutti gli spazi localmente convessi non metrizzabili. Attenzione che se anche la topologia è metrizzabile non è detto che i limitati dello svt corrispondano ai limitati nella metrica: infatti metriche che inducono la stessa topologia possono avere limitati diversi (posso sempre rendere limitata una metrica mantenendo la stessa topologia indotta).

**Teorema 1.** *Se $d$ è una distanza e $\varphi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ è una funzione concava con $\varphi(0) = 0$ allora $\varphi$ è crescente e $d' = \varphi \circ d$ è anch'essa una distanza che induce la stessa topologia di $d$.*

*Dimostrazione.* Dimostrazione omessa. □

Si usa tipicamente

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

per rendere limitata una distanza qualunque.

## 2.2 proprietà di separazione

**Proposizione 2.** *Se $W$ è un intorno di 0 in uno svt $X$ allora esiste $U$ intorno aperto di 0 tale che $U = -U$ e $U + U \subset W$.*

*Dimostrazione.* Sfruttiamo la continuità della somma nel punto $(0, 0)$. Dato un qualunque $W$ intorno di 0 esistono $V_1, V_2$ intorni di 0 tali che se $(x,y) \in V_1 \times V_2$ allora $x+y \in W$. Questo significa che $V_1 + V_2 \subset W$. Basterà allora prendere

$$V = V_1 \cap V_2, \qquad U = V \cap (-V).$$

$\square$

**Teorema 3.** *Sia $X$ uno svt, $K \subset X$ un compatto e $C \subset X$ un chiuso tali che $K \cap C = \emptyset$. Allora esiste un intorno $V$ di 0 tale che $(K+C) \cap (C+V) = \emptyset$.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in K$ un punto qualunque. Visto che $x \notin C$ e visto che $C$ è chiuso, esisterà un intorno aperto $W_x$ di 0 tale che $(W_x + x) \cap C = \emptyset$. Tramite il lemma precedente possiamo considerare $V_x$ un intorno aperto di 0 tale che $V_x + V_x + V_x \subset W_x$ e $V_x = -V_x$. Essendo $K$ compatto, ed essendo $V_x$ un ricoprimento aperto di $K$ al variare di $x \in K$, possiamo estrarre un ricoprimento finito, ovvero $x_1, \ldots, x_m$ tali che $V_{x_i} + x_i$ ricoprono $K$ per $i = 1, \ldots, m$. Prendiamo quindi $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$ cosicchè $V$ è aperto.

Per mostrare che $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$ è sufficiente mostrare che $K + V - V$ non interseca $C$. Sia dunque $x \in K$, $u \in V$ e $v \in V$. Esisterà $x_i$ tale che $x \in x_i + V_{x_i}$. Inoltre $u, v \in V \subset V_{x_i}$. Dunque

$$x + u - v \in x_i + V_{x_i} + V_{x_i} - V_{x_i} \subset x_i + W_{x_i}.$$

Ma, per costruzione, $x + W_x$ è disgiunto da $C$. $\square$

Osserviamo che se due aperti sono disgiunti, anche la chiusura di uno è disgiunto dall'altro.

**Corollario 4.** *Ogni svt è di Hausdorff ($T_2$).*

*Dimostrazione.* Dati $x, y$ in uno svt $X$ certamente $\{x\}$ è compatto e per ipotesi di svt abbiamo assunto che $\{y\}$ sia chiuso. Dunque possiamo applicare il teorema precedente per trovare un intorno $V$ di zero tale che $(x+V) \cap (y+V) = \emptyset$. $\square$

Ricordiamo che in ogni spazio di Hausdorff gli insiemi compatti sono anche chiusi.

**Corollario 5.** *Ogni intorno di 0 contiene anche un intorno chiuso di 0.*

*Dimostrazione.* Sia $W$ un intorno di 0 nello svt $X$. $W$ contiene un intorno aperto $U$ di 0. Sia $C = X \setminus U$ e $K = \{0\}$. Per il teorema precedente esiste $V$ intorno aperto di 0 tale che $V = K + V$ non interseca $C + V$. Ma allora anche $\overline{V}$ non interseca $C + V$ e quindi $V$ non interseca $C$. Dunque $\overline{V} \subset X \setminus C = U \subset W$. $\square$

Un sottoinsieme $A$ di uno svt $X$ si dice essere *bilanciato* se per ogni $x \in A$ e per ogni $c \in \mathbb{C}$ si ha $cx \in A$. L'insieme $A$ si dice *convesso* se per ogni $t \in [0, a]$, $x, y \in A$ si ha $tx + (1-t)y \in A$. *bilanciato* *convesso*

**Teorema 6.** *Sia $U$ un intorno di 0 in uno svt $X$. Allora $U$ contiene un intorno di 0 bilanciato. Se inoltre $U$ è convesso allora $U$ contiene un intorno di 0 bilanciato e convesso.*

*Dimostrazione.* Siccome $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ è continua (per definizione di svt) e visto che $0x = 0$, esiste un intorno $V$ di $0$ e un $\delta > 0$ (intorno di $0$ in $\mathbb{C}$) tali che per ogni $|\alpha| < \delta$ per ogni $x \in V$ si ha $\alpha x \in U$ cioè $\alpha V \subset U$ per ogni $|\alpha| < \delta$. Dunque l'unione per $|\alpha| < \delta$ di $\alpha V$ produce un insieme bilanciato che contiene $V$ ed è contenuto in $U$.

Supponiamo ora che $U$ sia un intorno convesso di $0$. Poniamo

$$W = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U.$$

Siccome $W$ è intersezione di convessi, $W$ stesso è convesso. Osserviamo inoltre che essendo $U$ convesso si ha $tU \subset U$ per ogni $t \in [0,1]$. Dunque $tW \subset W$ per ogni $t \in [0,1]$ e, ovviamente, $\alpha W = W$ per ogni $|\alpha| = 1$. Dunque per ogni $|\beta| \leq 1$ si ha $\beta = t\alpha$ e $\beta W \subset W$. Dunque $W$ è bilanciato.

Vogliamo mostrare che $W$ è un intorno di $0$. Per la continuità della moltiplicazione $(x,t) \mapsto tx$ esiste un intorno $V$ di zero e un $\delta > 0$ tali che per ogni $|\beta| < \delta$ si ha $\beta V \subset U$. Questo significa che per ogni $|\alpha| = 1$ si ha $\frac{\delta}{2}\alpha^{-1}V \subset U$ ovvero $\frac{\delta}{2}V \subset \alpha U$ da cui $\frac{\delta}{2}V \subset W$. Ma $\frac{\delta}{2}V$ è un intorno di $0$ dunque anche $W$ lo è. □

**Teorema 7.** *Un compatto $K$ in uno svt $X$ è limitato (oltre che chiuso, come già sappiamo).*

*Dimostrazione.* Sia $V$ un qualunque intorno di $0$. Dato $x \in K$ sappiamo che $x/k \to 0$ per $k \to +\infty$, cioè esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $x/k \in V$. Dunque $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} kV$. Estraendo un sottoricoprimento finito e osservando che $kV$ è una successione crescente di insiemi, deduciamo che esiste $k$ tale che $kV \supset K$. Dunque $K$ è limitato. □

**Teorema 8.** *[1, 1.15] Uno spazio localmente limitato (sll) ammette una base numerabile di intorni di $0$.*

*Dimostrazione.* Sia infatti $B$ un intorno limitato di $0$. $B$ contiene un intorno bilanciato di $0$ che a sua volta sarà limitato. Posso quindi supporre che $B$ sia bilanciato oltre che limitato. Per ogni $U$ intorno di $0$ esiste un $r > 0$ tale che $B \subset rU$. Dunque posto $\mathcal{B} = \{B/k \colon k \in \mathbb{N}\}$ per ogni $U$ intorno di $0$ esiste un $V \in \mathcal{B}$ tale che $V \subset U$ (basta prendere $k > r$ cosicché $B/k \subset rU/k \subset U$. Dunque $\mathcal{B}$ è una base di intorni di $0$. □

Vale anche il seguente teorema che non dimostriamo (ma si veda [1, 1.24]).

**Teorema 9.** *Uno svt che ammette una base numerabile di intorni di $0$ è metrizzabile.*

**Teorema 10.** *Se $X$ è uno svt e $Y$ è un suo sottospazio che risulta essere un F-spazio (cioè metrizzabile e completo) allora $Y$ è chiuso in $X$.*

*Dimostrazione.* Sia $d$ una metrica invariante su $Y$ e definiamo $B_k = \{y \in Y \colon d(y,0) < 1/k\}$. Visto che i $B_k$ sono aperti in $Y$ devono esistere $U_k$ aperti in $X$ tali che $B_k = Y \cap U_k$. Gli $U_k$ sono intorni di $0$ in $X$.

Consideriamo un punto $x \in \bar{Y}$. Per definizione ogni $Y \cap x + U_k$ è non vuoto. Dunque esiste $x_k \in Y \cap (x + U_k)$. Chiaramente $x_k$ è di Cauchy in $Y$ in quanto dato un qualunque intorno $U$ di 0 esiste $m$ tale che $U_m - U_m \subset U$ e quindi per ogni $k, j \geq m$ si ha $x_j - x \in U_m$, $x_k - x \in U_m$ da cui $x_k - x_j \in U_m - U_m \subset U$. Dunque $x_k$ converge in $Y$ ma non può che convergere a $x$, dunque $x \in Y$. Da cui $Y = \bar{Y}$. □

## 2.3 spazi localmente convessi e seminorme

Uno svt X si dice essere uno slc (spazio localmente convesso) se esiste una base di intorni convessi di 0.

Un insieme $A$ si dice *assorbente* se per ogni $x \in X$ esiste $r > 0$ tale che $x \in rA$. Ovviamente se $X$ è uno svt ogni intorno $U$ di 0 è assorbente in quanto per ogni $x \in X$, si ha $x/r \to 0$ per $r \to +\infty$ e quindi per ogni $r$ sufficientemente grande si ha $x/r \in U$ ovvero $x \in rU$.

**Teorema 11.** *Sia X uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X tali che ogni $B \in \mathcal{F}$ sia: convesso, bilanciato e assorbente. Supponiamo inoltre che $\mathcal{F}$ sia* separante *cioè che per ogni $x \neq 0$ esista $B \in \mathcal{F}$ ed esista $r > 0$ tale che $rx \notin B$.*

*Allora se consideriamo $\mathcal{B}$ la famiglia di tutte le intersezioni finite di riscalati di elementi di $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{B} := \{\bigcup_{k=1}^{N} r_k B_k \colon r_k > 0, B_k \in \mathcal{F}\}$$

*$\mathcal{B}$ risulta essere la base di intorni di 0 di una topologia invariante $\tau$ che rende X uno slc.*

*Dimostrazione.* Si definisce:

$$\tau = \{A \subset X \colon \forall x \in A\, \exists B \in \mathcal{B} \colon x \in x + B \subset A\}.$$

Verifichiamo che $\tau$ è una topologia. Unione di elementi di $\tau$ è ovviamente elemento di $\tau$ (qualunque sia $\mathcal{B}$). $X \in \tau$ in quanto $\mathcal{B}$ è non vuota e per ogni $B \in \mathcal{B}$ si ha $0 \in B$ essendo $B$ bilanciato. Per garantire che l'intersezione di due elementi di $\tau$ sia elemento di $\tau$ è sufficiente che intersezione di elementi di $\mathcal{B}$ contenga un elemento di $\mathcal{B}$. Ma questo è vero perché, per come è stata definita $\mathcal{B}$, l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ è ancora elemento di $\mathcal{B}$. Dunque $\tau$ è una topologia invariante per traslazioni di cui $\mathcal{B}$ è una base di intorni di 0.

Affinché $(X, \tau)$ sia uno spazio vettoriale topologico dobbiamo mostrare che somma e prodotto sono operazioni continue e che $\{0\}$ è chiuso. Una volta mostrato che $X$ è uno svt è ovvio che $X$ sia uno slc in quanto $\mathcal{B}$ è per costruzione una base di intorni convessi di 0.

Innanzitutto osserviamo che gli elementi di $\mathcal{B}$ sono anch'essi insiemi convessi, bilanciati e assorbenti. Infatti intersezione di bilanciati è bilanciato, intersezione di convessi è convesso, intersezione di bilanciati assorbenti è assorbente.

Per dimostrare che la somma è continua è sufficiente dimostrare che per ogni $U$ intorno di 0 esiste $V$ intorno di zero tale che $V + V \subset U$.

Ma questo è facile da ottenere in quanto gli insiemi convessi bilanciati $B$ soddisfano la proprietà $B = B/2 + B/2$.

Per dimostrare la continuità del prodotto $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ dobbiamo lavorare un pochino di più. Cerchiamo di mostrare che il prodotto è continuo nel punto $(\alpha_0, x_0)$ in $\mathbb{C} \times X$. Dato $U$ un intorno di 0 vogliamo mostrare che esiste un $W$ intorno di 0 e un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $|\alpha| < \varepsilon$ e per ogni $x \in W$ si ha $\alpha x - \alpha x_0 \in U$.

Prendiamo $V$ un intorno convesso, bilanciato, assorbente di 0 tale che $V + V \subset U$ (questo è possibile per quanto osservato prima). Essendo $V$ assorbente esisterà $r > 0$ tale che $x_0 \in rV$. Scegliamo allora $\varepsilon = 1/r$ e $W = V/(|\alpha_0| + \varepsilon)$. Si avrà allora per ogni $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ e per ogni $x \in x_0 + W$:

$$\begin{aligned}\alpha x - \alpha_0 x_0 &= \alpha(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0 \in \alpha W + (\alpha - \alpha_0)rV \\ &\subset |\alpha|W + |\alpha - \alpha_0|rV \subset (|\alpha_0| + \varepsilon)W + \varepsilon rV \\ &= V + V \subset U.\end{aligned}$$

Dunque anche la moltiplicazione è continua.

Ci resta da dimostrare che $\{0\}$ è chiuso. Dimostriamo che ogni $x \neq 0$ ha un intorno aperto disgiunto da 0. Dato $x \neq 0$ per l'ipotesi di separazione di $\mathcal{F}$ sappiamo che esiste $B \in \mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ tale che $x \notin B/r$ per qualche $r > 0$. Dunque $0 = x - x \notin x - B/r$. Ma $-B/r = B/r$ è un intorno di 0 e quindi $x$ è punto interno al complementare di $\{0\}$.

□

Una funzione $p\colon V \to \mathbb{R}$ si dice seminorma se soddisfa le seguenti proprietà: *seminorma*

1. $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ (subadditività)
2. $p(\alpha v) = |\alpha| p(v)$ (1-omogeneità)

Diremo che una seminorma $p$ è una *norma* se inoltre verifica la proprietà

3. $p(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

**Teorema 12.** *Le seminorme hanno le seguenti proprietà:*

1. $p(0) = 0$;
2. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$;
3. $p(x) \geq 0$;
4. $\{p(x) = 0\}$ *è un sottospazio vettoriale di* $X$;
5. $B_p = \{x \in X\colon p(x) < 1\}$ *è bilanciato, convesso, assorbente.*

*Dimostrazione.* Si ha $p(0) = p(0 \cdot 0) = |0|p(0) = 0p(0) = 0$. Inoltre dalla subadditività:

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$$

si ottiene $p(x) - p(y) \leq p(x - y) = p(-1(y - x)) = p(y - x)$. Scambiando $x$ con $y$ si ottiene dunque la disuguaglianza cercata. Ponendo poi $y = 0$ si ottiene $p(x) \geq |p(x)| \geq 0$. Presi $x, y \in \{p = 0\}$ si ha $p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0 + 0 = 0$ dunque $x + y \in \{p = 0\}$. Inoltre $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = 0$ da cui anche $\alpha x \in \{p = 0\}$.

Chiaramente $B_p$ è bilanciato per omogeneità di $p$. Dati $x, y \in B_p$ e $t \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} p(tx + (1-t)y) &\leq p(tx) + p((1-t)y) \\ &= tp(x) + (1-t)p(y) \leq t + (1-t) = 1 \end{aligned}$$

dunque $B_p$ è convesso. Per mostrare che $B_p$ è assorbente si prende un qualunque $x \in X$ e si sceglie $t > p(x)$. Allora $p(x/t) = p(x)/t < 1$ da cui $x \in tB_p$. □

**Teorema 13.** *Sia $p$ una seminorma su uno svt $X$. Sono equivalenti:*

1. *$p$ è continua;*
2. *$p$ è continua in $0$;*
3. *$B_p = \{p < 1\}$ è aperto.*

*Dimostrazione.* Ovviamente 1 implica 2 e 2 implica 3. Dimostriamo che 3 implica 1. Sia dunque $p$ una seminorma tale che $B_p = \{p < 1\}$ è aperto. Dato un punto $x \in X$ vogliamo dimostrare che $p$ è continua in $x$. Per ogni $\varepsilon > 0$ dobbiamo quindi determinare un intorno $U$ di $x$ tale che $p(U) \subset (p(x) - \varepsilon, p(x) + \varepsilon)$. Scegliamo $U = x + \varepsilon B_p$. Dato $y \in x + U$ si ha $y = x + \varepsilon u$ con $u \in B_p$ cioè $p(u) < 1$. Ma da un lato si ha

$$p(x + \varepsilon u) \leq p(x) + \varepsilon p(u) < p(x) + \varepsilon$$

e dall'altro

$$p(x + \varepsilon u) \geq p(x) - \varepsilon p(u) > p(x) - \varepsilon$$

e il teorema è dimostrato. □

Una famiglia $\mathcal{P}$ si seminorme su uno svt $X$ si dice *separante* se per ogni $x \neq 0$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) > 0$. *separante*

**Teorema 14.** *Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di seminorme separanti definite su uno spazio vettoriale $X$. La topologia $\tau$ generata dalla base di intorni di $0$ data dalle intersezioni finite degli insiemi*

$$rB_p = \{x \in X \colon p(x) < r\}$$

*al variare di $r > 0$ e $p \in \mathcal{P}$, rende $X$ uno slc (spazio vettoriale localmente convesso). Inoltre $\tau$ è caratterizzata come la più debole topologia che rende $X$ uno svt e che rende continua ogni seminorma $p \in \mathcal{P}$.*

*A posteriori osserviamo che è sufficiente prendere $r = 1/n$. Dunque se $\mathcal{P}$ è numerabile si può trovare una base numerabile di intorni di $0$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la famiglia $\mathcal{F} = \{rB_p \colon r > 0, p \in \mathcal{P}\}$. Questa è una famiglia di insiemi convessi, bilanciati, assorbenti. Il fatto che $\mathcal{P}$ sia separante significa che anche $\mathcal{F}$ è separante.

Per un teorema precedente sappiamo quindi che $\mathcal{F}$ genera una topologia $\tau$ che rende $X$ uno slc.

Chiaramente la topologia $\tau$ rende continue tutte le seminorme $p \in \mathcal{P}$ in quanto $B_p$ è aperto per costruzione e si può applicare il teorema precedente.

Inoltre ogni topologia invariante per traslazioni che rende continue tutte le seminorme $p \in \mathcal{P}$ deve contenere almeno le $B_p$ come intorni di $0$ e di conseguenza deve contenere ogni $rB_p$ e ogni intersezione finita di questi. $\square$

Dato un insieme $B$ assorbente possiamo definire un funzionale (detto *gauge* o funzionale di Minkowski):

$$\mu_B(x) = \inf\{t > 0 \colon x/t \in B\}.$$

**Teorema 15.** *Se $p$ è una seminorma si ha $p = \mu_{B_p}$.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\mu_{B_p}(x) &= \inf\{t > 0 \colon p(x/t) < 1\} = \inf\{t > 0 \colon p(x) < t\} \\ &= \inf(p(x), +\infty) = p(x).\end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 16.** *Sia $B$ bilanciato, convesso, assorbente, in uno spazio vettoriale $X$. Risulta che $\mu_B$ è una seminorma su $X$. Inoltre*

$$\{\mu_B < 1\} \subset B \subset \{\mu_B \leq 1\}.$$

*Dimostrazione.* Chiaramente $\mu_B$ è finito (in quanto $B$ è assorbente) ed è omogeneo (per definizione). Mostriamo la subadditività. Siano $t = \mu_B(x) + \varepsilon$, $s = \mu_B(y) + \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$. Allora $x/t, y/t \in B$ e siccome $B$ è convesso anche la loro combinazione:

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t}\frac{x}{t} + \frac{s}{s+t}\frac{y}{s}.$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\mu_B(x+y) = (s+t)\mu_B\left(\frac{x+y}{s+y}\right) \leq s+t = \mu_B(x) + \mu_B(y) + 2\varepsilon$$

e la subadditività è dimostrata.

Chiaramente se $\mu_B(x) < 1$ si ha $x \in B$ e se $\mu_B(x) > 1$ si ha $x \notin B$ (basta osservare che essendo $B$ assorbente e convesso, fissato $x$ l'insieme $\{t > 0 \colon x/t \in B\}$ è un intervallo illimitato e quindi coincide con uno dei seguenti: $[\mu_B(x), +\infty)$ o $(\mu_B(x), +\infty)$. $\square$

**Teorema 17.** *Sia $X$ uno slc. Allora la topologia di $X$ è generata da una famiglia di seminorme.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{B}$ una base di intorni convessi di $0$. Possiamo supporre che ogni $B \in \mathcal{B}$ sia aperto (la parte interna di un convesso è convessa). E' chiaro allora che la famiglia di seminorme $\mathcal{P} = \{\mu_B \colon B \in \mathcal{B}\}$ genera la topologia di $X$. $\square$

**Teorema 18.** *Sia $X$ uno slc la cui topologia è generata da una famiglia di seminorme $\mathcal{P}$. Allora si ha $x_j \to x$ se e solo se per ogni $p \in \mathcal{P}$ si ha $p(x_j - x) \to 0$.*

*Dimostrazione.* Chiaramente se $x_j \to x$ si ha $p(x_j - x) \to 0$ in quanto le seminorme $p_j$ sono continue.

Viceversa supponiamo che $p(x_j - x) \to 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$. Dato un intorno $U$ di 0 vogliamo mostrare che $x_j - x$ sta definitivamente in $U$. L'intorno $U$ deve contenere una intersezione finita di riscalamenti di palle unitarie delle seminorme:

$$U \supset \bigcap_{k=1}^{m} r_k B_{p_k}.$$

Ma per ogni $k$ si ha $p_k(x_j - x) \to 0$ quindi esiste $N_k$ tale che per ogni $j > N_k$ si ha $p_k(x_j - x) < r_k$. Questo significa che per tali indici $j$ si ha $x_j - x \in r_k B_{p_k}$. Posto $N = \max_{k=1}^m N_k$ si ha il risultato voluto. □

**Teorema 19.** *Se $\mathcal{P}$ è una famiglia separante, numerabile di seminorme sullo spazio vettoriale $X$ allora la topologia $\tau$ generata da $\mathcal{P}$ è metrizzabile.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{P} = \{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e definiamo

$$d(x,y) = \max_k \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}.$$

Chiaro che $d$ soddisfa la disuguaglianza triangolare in quanto è massimo di distanze (si veda il Teorema 1). Inoltre $d(x,y) = 0$ implica $x = y$ in quanto $\mathcal{P}$ è separante. E' anche ovvio che la distanza è invariante per traslazioni. Dunque è sufficiente dimostrare che le palle $B_r = \{x \colon d(x,y) < r\}$ formano una base di intorni per la topologia $\tau$.

Da un lato osserviamo che $d(x) < r$ equivale a

$$(2^{-k} - r) p_k(x) < r$$

che è certamente soddisfatta per tutti i $k > \log_2(1/r)$, mentre per i rimanenti (finiti) indici $k$ si deve avere

$$p_k(x) < \frac{r}{2^{-k} - r} =: r_k$$

dunque $B_r$ risulta essere uguale ad una intersezione finita di insiemi della forma $r_k B_{p_k}$ e dunque contiene un intorno di 0 della topologia $\tau$.

Viceversa dato un qualunque intorno $W$ di 0 per $\tau$ questo contiene una intersezione finita $k = 1, \dots, m$ di insiemi della forma $r_k B_{p_k}$. Basterà scegliere $r > 0$ in modo che

$$2r < \min_{k=1}^{m} 2^{-k} r_k$$

infatti in tal caso ogni $x \in B_r$ soddisfa

$$\frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)}{1 + p_k(x)} < r < \frac{2^{-k} r_k}{2}$$

da cui segue $p_k(x) < r_k$. Dunque $B_r \subset W$. □

**Teorema 20.** *Sia $X$ uno slc generato da una famiglia di seminorme $\mathcal{P}$. Un insieme $C \subset X$ è limitato se e solo se ogni seminorma $p \in \mathcal{P}$ è limitata su $C$.*

*Dimostrazione.* Se $C$ è limitato allora per ogni $U$ intorno di 0 esiste $r > 0$ tale che $C \subset rU$. In particolare preso $U = B_p$ si ha $C \subset rB_p$ che significa che $p(x) < r$ per ogni $x \in C$.

Viceversa supponiamo che ogni $p \in \mathcal{P}$ sia limitata su $C$. Dato un qualunque $U$ intorno di 0 sappiamo che $U$ contiene un intorno del tipo

$$U \supset \bigcap_{k=1}^{m} r_k B_{p_k}, \qquad p_k \in \mathcal{P}.$$

Sappiamo che per ogni $k$ esiste $c_k$ tale che $p_k(x) < c_k$ per ogni $x \in C$. Posto

$$r := \max_{k=1}^{m} \frac{c_k}{r_k}$$

si trova che ogni $x \in C$ sta in $rr_k B_{p_k}$ e quindi sta in $tU$. □

**Teorema 21.** *Uno svt $X$ è normabile se e solo se esiste un intorno convesso e limitato di* 0*.*

*Dimostrazione.* Se $X$ è normabile è chiaro che la palla unitaria della norma è un convesso limitato (ogni intorno di 0 contiene un riscalamento della palla per definizione).

Viceversa sia $B$ un intorno convesso, limitato di 0. Siccome $B$ è un intorno di 0 deve essere assorbente (in quanto per ogni $x$ si deve avere $x/k \to 0$ per la continuità del prodotto e dunque $x$ deve stare in $kB$). Dunque $p(x) = \mu_B(x)$ risulta essere una seminorma su $X$.

Mostriamo ora che $p$ è una norma. Supponiamo che ci sia $x \neq 0$ tale che $p(x) = 0$. Siccome $\{0\}$ è chiuso esiste un intorno $U$ di 0 tale che $x \notin U$. Ma allora non esiste $r > 0$ tale che $B \subset rU$ in quanto per ogni $r > 0$ si ha $p(rx) = rp(x) = 0$ dunque $rx \in B$ ma $rx \notin rU$.

Mostriamo ora che la topologia generata da $\mathcal{P} = \{p\}$ coincide con $\tau$ la topologia originale su $X$. Visto che $B_p = B$ è un intorno di zero per $\tau$, è chiaro che la topologia indotta da $p$ è meno fine di $\tau$. Viceversa dato un intorno $U$ di zero per $\tau$ siccome $B$ è limitato esiste $r > 0$ tale che $B_p = B \subset rU$ cioè $B_p/r \subset U$ e dunque la topologia indotta da $p$ è più fine di $\tau$. □

## 2.4 LO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE

Sia $C(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue definite su $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{C}$ (o in $\mathbb{R}$). Su $C(\Omega)$ possiamo mettere la topologia generata dalle seminorme $C(\Omega)$

$$p_K(f) := \max_{x \in K} |f(x)|$$

dove $K$ è un qualunque compatto in $\Omega$. Osserviamo subito che se scegliamo una famiglia crescente di compatti $K_j$ che invade $\Omega$ allora ogni compatto $K$ risulta incluso in uno dei $K_j$ e quindi le seminorme $p_{K_j}$ generano la stessa topologia generata da tutte le $p_K$.

Inoltre se $K_j$ è crescente, l'intersezione finita di riscalati dei convessi $B_{p_{K_j}}$ contiene un riscalato della $B_{p_{K_N}}$ con $N$ il massimo degli indici considerati, dunque una base della topologia è data dalle singole palle $B_{p_{K_j}}$ senza necessità di farne l'intersezione finita.

Essendo le $p_{K_j}$ una quantità numerabile risulta inoltre che questo spazio è metrizzabile. La convergenza è data quindi dalla convergenza uniforme su ogni compatto e determina la topologia dello spazio. Lo spazio è anche completo, perché se $f_k$ è una successione di Cauchy, allora su ogni $K$ la successione $f_k$ converge ad una funzione continua $f$ che quindi risulta essere definita su tutto $\Omega$. La convergenza uniforme su ogni compatto implica inoltre la convergenza in $C(\Omega)$ e dunque abbiamo mostrato che ogni successione di Cauchy converge.

Risulta quindi che $C(\Omega)$ è uno spazio di Frechét.

## 2.5 SPAZI DI FUNZIONI REGOLARI

Chiamiamo *multi-indice* un elemento $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ (intendiamo qui che $0 \in \mathbb{N}$). Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ possiamo definire $x^\alpha \in \mathbb{R}$ tramite *multi-indici*

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Analogamente possiamo definire l'operatore differenziale

$$D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

L'ordine di $D^\alpha$ (ovvero il numero di derivate) è la *lunghezza* di $\alpha$:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Lo spazio $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni scalari definite su $\Omega$ che ammettono derivate di ogni ordine. Su tale spazio, $D^\alpha \colon \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$ è definito per ogni $\alpha$. $\mathcal{E}(\Omega)$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e per ogni compatto $K$ di $\Omega$ possiamo definire una seminorma:

$$p_{\alpha,K}(f) := \max_{x \in K} |D^\alpha f(x)|. \tag{1}$$

Chiaramente queste seminorme separano $\mathcal{E}(\Omega)$ in quanto per ogni $x \in \Omega$ posto $K = \{x\}$ e $\alpha = 0$ si ha $|f(x)| = 0$. Dunque $\mathcal{E}(\Omega)$ risulta essere uno spazio localmente convesso con la topologia generata da suddette seminorme. Inoltre selezionando una successione di compatti $K_j$ che invade $\Omega$ è chiaro che le seminorme $p_{\alpha,K_j}$ generano la stessa topologia in quanto se $K_j \supset K$ allora $p_{\alpha,K} \geq p_{\alpha,K_j}$ e quindi $B_{p_{\alpha,K}} \subset B_{p_{\alpha,K_j}}$. Visto che quest'ultima famiglia di seminorme è numerabile la topologia generata risulta essere metrizzabile. La convergenza è data dalla convergenza uniforme di tutte le derivate su ogni compatto.

Inoltre lo spazio risultante è completo in quanto data una successione di Cauchy $f_k$ la successione e tutte le sue derivate convergono uniformemente su ogni compatto $K$ ad una funzione $f$ definita su tutto $\Omega$. Dunque $\mathcal{E}(\Omega)$ risulta essere uno spazio di Frechét.

Inoltre $\mathcal{E}(\Omega)$ ha la proprietà di Heine-Borel. Infatti data una qualunque successione $f_k$ in un insieme limitato $C$ di $\mathcal{E}(\Omega)$, per la caratterizzazione dei limitati sappiamo che ogni seminorma $p_j$ risulta limitata su tale successione e quindi la successione e tutte le sue derivate sono uniformemente limitate su ogni compatto $K$. Per Ascoli-Arzelà la successione ammette una estratta convergente.

$\mathcal{E}(\Omega)$ non è localmente limitato, altrimenti sarebbe localmente compatto e avrebbe dunque dimensione finita, cosa che non è, ma la vedremo tra poco. Dunque $\mathcal{E}(\Omega)$ non è normabile.

Definiamo il supporto di una funzione $f$ come il più piccolo chiuso al di fuori del quale la funzione si annulla:

$$\operatorname{spt} f := \overline{\{x \in \Omega \colon f(x) \neq 0\}}.$$

Fissato un compatto $K \subset \Omega$ possiamo definire

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in \mathcal{E}(\Omega) \colon \operatorname{spt} f \subset K\}.$$

Su $\mathcal{D}_K(\Omega)$ consideriamo la topologia indotta da $\mathcal{E}(\Omega)$ cosicché $\mathcal{D}_K(\Omega)$ risulta essere un sottospazio vettoriale di $\mathcal{E}(\Omega)$. Visto che la convergenza di $\mathcal{E}(\Omega)$ è più forte della convergenza uniforme su $K$ (data da $p_{0,K}$) se $f_k \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ e $f_k \to f$ si trova che il supporto di $f$ è anch'esso contenuto in $K$, dunque $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Dunque $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{E}(\Omega)$. La topologia di $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è generata dalle seminorme $p_{\alpha,K}$ in quanto se $J$ è un altro compatto di $\Omega$ si ha $p_{\alpha,K}(f) \geq p_{\alpha,J}(f)$ per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

In effetti possiamo osservare che la topologia di $\mathcal{D}_K(\Omega)$ non dipende da $\Omega$... qualunque aperto contenente $K$ determina lo stesso spazio con la stessa topologia (ogni funzione di $\mathcal{D}_K(\Omega)$ può essere estesa a zero fuori da $\Omega$ per determinare una funzione in $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$, e viceversa la funzione in $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ può essere ristretta ad $\Omega$). Dunque scriveremo più semplicemente $\mathcal{D}_K$ al posto di $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

E' utile osservare che $\mathcal{D}_K$ ha dimensione infinita se $K$ ha parte interna non vuota. Se $K$ contiene una palla, conterrà anche una quantità numerabile di palle di raggio sempre più piccolo. Su ognuna di queste palle possiamo trovare una funzione non nulla a supporto compatto nella palla, utilizzando il teorema seguente. Chiaramente queste funzioni sono tra loro indipendenti. Dunque $\mathcal{D}_K$ ha dimensione infinita (se $K$ ha parte interna non vuota) e di conseguenza $\mathcal{E}(\Omega)$ ha dimensione infinita (se $\Omega$ non è vuoto!)

**Teorema 22.** 

1. *Esiste una funzione* $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ *tale che* $0 \leq f(x) < 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ *se* $x \leq 0$ *e* $f(x) > 0$ *se* $x > 0$;

2. *esiste una funzione* $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ *tale che* $0 \leq g(x) \leq 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ *per* $x \leq 0$ *e* $f(x) = 1$ *per* $x \geq 1$.

3. *Dati* $0 < r < R$ *esiste una funzione* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *tale che* $\varphi(x) = 1$ *per* $|x| \leq r$, $\varphi(x) = 0$ *per* $|x| \geq R$ *e* $|x| \in [0,1]$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$.

*Dimostrazione.* La funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ può essere definita come segue

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

Con un poco di attenzione si può verificare che tutte le derivate di questa funzione risultano continue e si annullano per $x = 0$ in quanto l'esponenziale $e^{-1/x}$ tende a zero per $x \to 0$, più velocemente di qualunque potenza di $x$.

La funzione $g$ può essere definita tramite $f$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}.$$

Il denominatore non si annulla mai, dunque la funzione è in $C^\infty$. Inoltre le proprietà richieste discendono facilmente dalle proprietà di $f$.

La funzione $\varphi$ si definisce quindi come

$$\varphi(x) = g\left(\frac{R-x}{R-r}\right).$$

□

## 2.6 lo spazio delle funzioni test

Definiamo $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ con $\Omega$ aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$ come lo spazio delle funzioni $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ il cui supporto $\operatorname{spt} f$ è compatto in $\Omega$. $\mathcal{D}(\Omega)$

La funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ viene chiamata *funzione test*. Chiaramente $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale (complesso se le funzioni sono a valori in $\mathbb{C}$). *funzioni test*

Vogliamo mettere una topologia su $\mathcal{D}(\Omega)$. Osserviamo che si ha

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \text{ compatto in } \Omega} \mathcal{D}_K.$$

Si tratterà dunque di "fare il limite per $K \to \Omega$" delle topologie sui $\mathcal{D}_K$.

*Osservazione.* Si potrebbe mettere su $\mathcal{D}(\Omega)$ la topologia indotta da $\mathcal{E}(\Omega)$, ma tale topologia non sarebbe sufficientemente forte. Infatti $\mathcal{D}(\Omega)$ non risulterebbe neanche chiuso (e quindi non completo). Per fare un esempio è sufficiente prendere un successione $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ di funzioni che valgono 1 su $B_k(0)$ e che valgono 0 su $B_{k+1}(0)$ (l'esistenza di tali funzioni è garantita dal teorema 22). Tale successione converge uniformemente su ogni compatto (in quanto è definitivamente costante 1 su ogni compatto) e quindi converge in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ alla funzione 1. Tale successione è in $\mathcal{D}(\Omega)$ ma il limite no.

**Teorema 23.** *Sullo spazio vettoriale $\mathcal{D}(\Omega)$ è definita la più fine topologia $\tau$ di slc che rende le immersioni $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ continue per ogni compatto $K \subset \Omega$.*

*Risulta inoltre che la topologia indotta da $\mathcal{D}(\Omega)$ su $\mathcal{D}_K$ coincide con la topologia già definita su $\mathcal{D}_K$.*

*Dimostrazione.* Sia $\tau_K$ la topologia di $\mathcal{D}_K$ con $K$ compatto in $\Omega$. Affinché ogni immersione $i_K \colon \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega)$ sia continua è necessario che l'intersezione di ogni aperto di $\mathcal{D}(\Omega)$ con $\mathcal{D}_K$ sia in $\tau_K$. D'altra parte perché la topologia sia localmente convessa deve essere determinata da una base di intorni aperti, convessi bilanciati di 0.

Definiamo dunque $\mathcal{B}$ come la famiglia di tutti gli insiemi convessi e bilanciati in $\mathcal{D}(\Omega)$ tali che la loro intersezione con $\mathcal{D}_K$ sia elemento di $\tau_K$. Tali insiemi $B$ sono automaticamente assorbenti in quanto ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ sta in un qualche $\mathcal{D}_K$ e l'intersezione $B \cap \mathcal{D}_K$ essendo un intorno di 0 in $\mathcal{D}_K$ è necessariamente assorbente in $\mathcal{D}_K$.

Dunque per il Teorema 11 sappiamo che $\mathcal{B}$ è la base di una topologia slc su $\mathcal{D}(\Omega)$.

Inoltre tale topologia chiaramente rende continua ogni immersione $i_K \colon \mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$. E' anche la più fine topologia con tale proprietà. Infatti una topologia localmente convessa è univocamente determinata dagli intorni convessi, bilanciati e aperti di 0 e noi abbiamo dichiarato come aperti il massimo possibile di insiemi bilanciati e convessi in modo da mantenere la continuità delle immersioni.

Chiaro dunque che se $A$ è un aperto in $\mathcal{D}(\Omega)$ allora per ogni compatto $K$ si ha che $A \cap \mathcal{D}_K = i_K^{-1}(A)$ è aperto in $\mathcal{D}_K$.

Viceversa vogliamo dimostrare che ogni aperto $A$ in $\mathcal{D}_K$ è intersezione di un aperto $A'$ di $\mathcal{D}(\Omega)$ con $\mathcal{D}_K$. Ricordiamoci che la topologia su $\mathcal{D}_K$ è generata dalle seminorme $p_\alpha = p_{\alpha,K}$ definite in (1). Se $A = \{f \in \mathcal{D}_K \colon p_\alpha(f) < r\}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $r > 0$, allora si ha chiaramente $A = A' \cap \mathcal{D}_K$ con $A' = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) \colon p_\alpha(f) < r\}$. Lo stesso rimane vero se $A$ è intersezione finita di insiemi di quella forma, ovvero se $A$ è un elemento della base di $\mathcal{D}_K$ definita dalle seminorme $p_\alpha$. Ma ogni aperto $A$ è unione di traslati di elementi di questo tipo. Il risultato segue.

□

La costruzione che abbiamo appena fatto è quella di limite induttivo. La topologia risultante si chiama *topologia finale*.

**Teorema 24.**

1. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la seminorma su $\mathcal{D}(\Omega)$ definita da*
$$p_\alpha(f) := \max_{x\in\Omega} |D^\alpha(f)|$$
*è continua.*

2. *Un insieme $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ è limitato se e solo se esiste un compatto $K \subset \Omega$ per cui $E \subset \mathcal{D}_K$ e inoltre per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$*
$$\sup_{f\in E} \max_{x\in K} |D^\alpha f(x)| < +\infty.$$

3. *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ ha la proprietà di Heine-Borel.*

4. *Una successione $f_k$ è di Cauchy in $\mathcal{D}(\Omega)$ se e solo se esiste un compatto $K$ di $\Omega$ tale che per ogni $k$ si ha $f_k \in \mathcal{D}_K$ e $f_k$ è di Cauchy in $\mathcal{D}_K$.*

5. *$f_j \to f$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se e solo se c'è un compatto $K$ di $\Omega$ tale che il supporto di ogni $f_j$ è contenuto in $K$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ si ha $D^\alpha f_j \to f$ uniformemente.*

6. *In $\mathcal{D}(\Omega)$ ogni successione di Cauchy converge (cioè $\mathcal{D}(\Omega)$ è $\sigma$-completo).*

*Dimostrazione.* [1, 6.5]

1. Osserviamo che per ogni $K$ compatto in $\Omega$ si ha $B_{p_\alpha} \cap \mathcal{D}_K = B_{p_{\alpha,K}}$ dunque $B_{p_\alpha}$ è un convesso bilanciato assorbente ed è un intorno di 0. Di conseguenza $p_\alpha$ è continua.

2. Sia $E$ un limitato in $\mathcal{D}(\Omega)$. Sia $K_j$ una successione di compatti che invade $\Omega$ e supponiamo per assurdo che nessuno di essi contenga il supporto di tute le funzioni di $E$. Allora per ogni $j$ esiste $x_j \notin K_j$ e $f_j \in E$ tali che $f_j(x_j) \neq 0$. Consideriamo l'insieme

$$B = \{f \in \mathcal{D}(\Omega) \colon \left|f(x_j)\right| < \left|f_j(x_j)\right|/2^j, j \in \mathbb{N}\}.$$

Chiaramente $B$ è convesso e bilanciato. Inoltre per ogni compatto $K$ solo un numero finito di punti $x_j$ cadono in $K$, dunque $B \cap \mathcal{D}_K$ risulta essere aperto in $\mathcal{D}_K$, infatti contiene $\{p_{0,K} < m\}$ con $m = \max_{x_j \in K} \left|f_j(x_j)\right|/2^j$. Ma allora dovrebbe esistere $r > 0$ tale che $E \subset rB$ il che significa che

$$\left|f_j(x_j)\right| < \frac{r}{2^j}\left|f_j(x_j)\right|$$

che è assurdo in quanto $f/2^j \to 0$. Dunque se $E$ è limitato c'è un compatto $K$ tale che $E \subset \mathcal{D}_K$.

Visto che su $\mathcal{D}_K$ c'è la topologia indotta da $\mathcal{D}(\Omega)$, $E$ risulta limitato anche su $\mathcal{D}_K$ e dunque ogni $p_\alpha$ è limitata su $E$. Che è quello che dovevamo dimostrare.

Viceversa se le funzioni di $E$ hanno tutte supporto in $K$ e se le seminorme $p_\alpha$ sono limitate su $E$ in $\mathcal{D}_K$ allora $E$ risulta limitato in $\mathcal{D}_K$ e di conseguenza è limitato anche in $\mathcal{D}(\Omega)$.

3. Sia $E$ un chiuso limitato. Allora $E \subset \mathcal{D}_K$ per un compatto $K$ di $\Omega$. Dunque $E$ è chiuso e limitato in $\mathcal{D}_K$ e quindi, avendo $\mathcal{D}_K$ la proprietà di Heine-Borel, esso è compatto in $\mathcal{D}_K$. Ma allora è compatto anche in $\mathcal{D}(\Omega)$.

4. Innanzitutto osserviamo che (in generale) ogni successione di Cauchy è limitata. Infatti se $f_k$ è di Cauchy e $U$ è un intorno bilanciato di 0 esiste $V$ intorno di 0 tale che $V + V \subset U$ ed esiste un $N$ tale che per ogni $j, k \geq N$ si ha $f_k - f_j \in V$ e in particolare per ogni $j \geq N$ si ha $f_j \in f_N + V$. Siccome $V$ è assorbente esiste $r_k > 0$ tale che $f_k \in r_k V$. Prendendo $r = \max_{k=1}^N r_k$ risulta quindi $f_k \in rU$ per ogni $k \leq N$ e inoltre, per $k \geq N$

$$f_k \in f_N + V \subset rV + V \subset rV + rV \subset rU.$$

Dunque ogni successione di Cauchy è limitata (e in particolare lo sono le successioni convergenti).

Esiste quindi un compatto $K$ tale che l'intera successione è contenuta in $\mathcal{D}_K$. Dunque la successione $f_k$ è di Cauchy in $\mathcal{D}_K$ che significa esattamente quanto esposto.

Viceversa se $f_k$ è di Cauchy in $\mathcal{D}_K$ è chiaramente di Cauchy anche in $\mathcal{D}(\Omega)$.

5. la successione $f_j$ è di Cauchy, quindi c'è il compatto $K$ e la successione è in $\mathcal{D}_K$. In $\mathcal{D}_K$ la convergenza è quella esposta.

6. è conseguenza di quanto detto sopra e del fatto che $\mathcal{D}_K$ è completo.

□

**Teorema 25.** *$\mathcal{D}_K$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{D}(\Omega)$ per ogni $K$ compatto in $\Omega$.*

**Teorema 26.** *Sia $Y$ slc e sia $L\colon \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ una applicazione lineare. Allora sono equivalenti:*

1. *$L$ è continuo;*

2. *$L$ è limitato (manda limitati in limitati);*

3. *$L$ ristretto ad ogni $\mathcal{D}_K$ è limitato;*

4. *$L$ ristretto ad ogni $\mathcal{D}_K$ è sequenzialmente continuo (manda successioni convergenti in successioni convergenti)*

5. *$L$ è sequenzialmente continuo;*

6. *$L$ ristretto ad ogni $\mathcal{D}_K$ è continuo*

*Dimostrazione.* In generale se $X$ e $Y$ sono svt un operatore $L\colon X \to Y$ continuo è anche limitato. Sia infatti $V$ un qualunque intorno bilanciato di 0 in $Y$. Esiste un $U$ intorno bilanciato di 0 in $X$ tale che $L[U] \subset V$. Se $E$ è limitato in $X$ esiste $r > 0$ tale che $E \subset rU$. Ma allora $L[E] \subset rL[U] \subset rV$ e dunque $L[E]$ è limitato in $Y$.

Osserviamo ora che un insieme $E$ limitato in $\mathcal{D}_K$ è anche limitato in $\mathcal{D}(\Omega)$ e questo vale in generale quando $E$ è limitato rispetto alla topologia indotta su un sottospazio. Infatti sia $U$ un qualunque intorno di 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora $V = U \cap \mathcal{D}_K$ è un intorno di 0 in $\mathcal{D}_K$ e se prendiamo un insieme $E$ limitato in $\mathcal{D}_K$ dovrà esistere $r > 0$ tale che $E \subset rV$. Ma $rV \subset rU$ e dunque $E$ è limitato anche in $\mathcal{D}(\Omega)$. Dunque, visto che $L$ manda limitati di $\mathcal{D}(\Omega)$ in limitati di $Y$, a maggior ragione manda i limitati di $\mathcal{D}_K$ in limitati.

Sempre in generale se $X$ è uno svt metrizzabile e $Y$ è uno svt, e se $L\colon X \to Y$ è limitato allora $L$ manda successioni convergenti in successioni convergenti. Sia infatti $x_k \to 0$ in $X$. Supponiamo per un attimo che $d(0, x_k) < 1/k^2$ con $d$ una distanza invariante su $X$. In tal caso si ha, sfruttando l'invarianza di $d$:

$$\begin{aligned} d(0, kx_k) &\leq \sum_{j=1}^{k} d((j-1)x_k, jx_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k} d(x_k, 0) = kd(x_k, 0) \\ &\leq k\frac{1}{k^2} \to 0. \end{aligned}$$

Dunque la successione $kx_k$ è anch'essa limitata (essendo convergente). Dunque per ipotesi la sua immagine $L[kx_k] = kL[x_k]$ è anch'essa limitata. Dunque per ogni $V$ intorno bilanciato di 0 in $Y$ deve esistere $r > 0$ tale che $kL[x_k] \in rV$ per ogni $k$. Ma per $k > r$ si avrà dunque $L[x_k] \in rV/k \subset V$. Dunque $L[x_k] \to 0$ in $Y$.

Nel nostro caso $\mathcal{D}_K$ è metrizzabile dunque supponendo che la restrizione di $L$ a $\mathcal{D}_K$ sia limitata, si deduce che tale restrizione è sequenzialmente continua.

Supponiamo ora di sapere che la restrizione di $L$ ad ogni $\mathcal{D}_K$ è sequenzialmente continua. Sia $f_k \to 0$ una qualunque successione convergente (non è restrittivo supporre che converga a zero). Allora per quanto visto in un teorema precedente esiste $K$ tale che l'intera successione è contenuta in $\mathcal{D}_K$. Dunque sulla successione $L$ coincide con la sua restrizione a $\mathcal{D}_K$ e dunque manda la successione convergente in una successione convergente.

Se ora supponiamo che $L$ sia sequenzialmente continuo, è chiaro la restrizione di $L$ a $\mathcal{D}_K$ rimane ancora sequenzialmente continua. Ma ora c'è un risultato generale che ci dice che se $X$ è uno spazio metrico e $Y$ è uno spazio topologico, e se $f\colon X \to Y$ è sequenzialmente continua, allora $f$ è continua (il viceversa è vero anche se $X$ è solamente uno spazio topologico). Infatti supponiamo per assurdo che $f$ non sia continua in un punto $x \in X$. Allora esiste un intorno $V$ di $f(x)$ tale che per ogni $U$ intorno di $x$ si ha $f(U) \setminus V \neq \emptyset$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ consideriamo dunque l'intorno $U_k = \{z \in X\colon d(z,x) < 1/k\}$. Dovrà dunque esistere $x_k \in U_k$ tale che $f(x_k) \notin V$. Ma allora $x_k \to 0$ e nonostante questo $f(x_k)$ non converge a $f(x)$. Assurdo. Siccome $\mathcal{D}_K$ è metrizzabile (di nuovo!) possiamo applicare questo risultato e concludere che se $L$ è sequenzialmente continuo allora la sua restrizione ad ogni $\mathcal{D}_K$ è continua.

L'ultimo passaggio è forse il più astratto. Fin'ora non abbiamo mai usato il fatto che $Y$ è uno slc (ci bastava svt). Supponiamo che $L$ ristretta ad ogni $\mathcal{D}_K$ sia continua. Osserviamo che la restrizione di $L$ a $\mathcal{D}_K$ non è altro che la composizione $L_K = L \circ i_K$ dove $i_K\colon \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}(\Omega)$ è la mappa di inclusione. Ricordiamo ora che la topologia $\tau$ di $\mathcal{D}(\Omega)$ ha la proprietà di essere la topologia di slc più fine che rende continue le inclusioni $i_K$. Consideriamo ora su $\mathcal{D}(\Omega)$ la famiglia di insiemi

$$\sigma = \{L^{-1}[A]\colon A \text{ aperto in } Y\}.$$

E' molto facile verificare che $\sigma$ è una topologia (per le buone proprietà della mappa inversa). Osserviamo che $\sigma$ è la topologia più debole che rende continua la mappa lineare $L$. E' chiaro infatti che $L$ risulta continuo rispetto a questa topologia (abbiamo forzato le controimmagini di aperti ad essere aperti) ed è la topologia più debole in quanto contiene il minimo indispensabile di aperti per ottenere la continuità di $L$. Osserviamo ora che tale topologia $\sigma$ rende anche continua ogni inclusione $i_K$. Infatti se $A'$ è un aperto in $\mathcal{D}(\Omega)$ si ha $A' = L^{-1}[A]$ con $A$ aperto di $Y$ e dunque

$$i_K^{-1}[A'] = i_K^{-1}[L^{-1}[A]] = (L \circ i_K)^{-1}[A]$$

ed essendo per ipotesi $L \circ i_K$ continua, deduciamo che $i_K^{-1}[A']$ è effettivamente aperto in $\mathcal{D}_K$. Per la proprietà caratterizzante $\tau$ scopriamo dunque che $\tau$ dev'essere più fine di $\sigma$. Ma allora se $L$ è continuo rispetto a $\sigma$ a maggior ragione dovrà essere continuo rispetto a $\tau$.

□

**Teorema 27.** *Sia $K$ un compatto di $\Omega$. Si ha*

1. *$\mathcal{D}_K$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{D}(\Omega)$;*

2. *$\mathcal{D}_K$ ha parte interna vuota;*

*Di conseguenza risulta che $\mathcal{D}(\Omega)$ non è metrizzabile.*

*Dimostrazione.* Fissato $K$ compatto in $\Omega$ e scelta $f \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}_K$ vogliamo trovare un intorno $B$ di 0 tale che $(f + B) \cap \mathcal{D}_K = \emptyset$. In effetti data $f$ basta considerare un $x \in \Omega \setminus K$ tale che $f(x) \neq 0$ e basta scegliere

$$B = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \colon |\varphi(x)| < \frac{|f(x)|}{2}\}.$$

Chiaramente $B$ è un intorno di 0 in quanto $B \supset rB_{p_{0,K}}$ con $r = |f(x)|/2$. Inoltre è chiaro che se $\varphi \in B$ allora $(f + \varphi)(x) \neq 0$ in quanto

$$|(f + \varphi)(x)| \geq |f(x)| - |\varphi(x)| \geq \frac{|f(x)|}{2} > 0.$$

Se un sottospazio vettoriale $V$ di uno svt $X$ contenesse un intorno di un punto $x$ allora (traslando) conterrebbe anche un intorno di 0. Allora $V$ sarebbe assorbente. Ma i riscalamenti di $V$ coincidono con $V$ e dunque si avrebbe $V = X$. Cioè nessun sottospazio vettoriale $V \neq X$ di uno svt $X$ può avere parte interna.

Se $K_j$ è una successione di compatti che invade $\Omega$ si ha trova che $\mathcal{D}(\Omega)$ è unione dei $\mathcal{D}_{K_j}$ ovvero è unione numerabile di chiusi con parte interna vuota. Se $\mathcal{D}(\Omega)$ per assurdo fosse metrizzabile sarebbe anche completo (in quanto abbiamo visto che $\mathcal{D}(\Omega)$ è completo per successioni) e dunque si applicherebbe il Lemma di Baire, che afferma che non è possibile che uno spazio metrico completo sia unione numerabile di suoi sottoinsiemi chiusi e con parte interna vuota. □

# 3 DISTRIBUZIONI

Un funzionale lineare e continuo sullo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ si chiama *distribuzione* o *funzione generalizzata*. Lo spazio delle distribuzioni è lo spazio duale di $\mathcal{D}(\Omega)$ e si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$. *distribuzione*

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $N \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\|\varphi\|_N := \max_{|\alpha|\leq N} p_\alpha(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq N} \max_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Dalla definizione discende che le norme $\|\cdot\|_N$ inducono su $\mathcal{D}_K$ la stessa topologia indotta dalle norme $p_{\alpha,K}$. In particolare queste norme sono continue su $\mathcal{D}(\Omega)$.

**Teorema 28.** *Un funzionale lineare $f$ su $\mathcal{D}(\Omega)$ è continuo (e quindi è una distribuzione) se e solo se per ogni $K$ compatto in $\Omega$ esistono $N \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tali che*

$$|f[\varphi]| \leq c\|\varphi\|_N \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K. \tag{2}$$

*Dimostrazione.* Per quanto visto nel Teorema 26 un funzionale lineare è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$ se e solo se è continuo su ogni $\mathcal{D}_K$. Ma la topologia su $\mathcal{D}_K$ è generata dalle seminorme $p_\alpha$ (che su $\mathcal{D}_K$ in realtà sono anch'esse norme) o, equivalentemente, dalle norme $\|\cdot\|_N$ appena introdotte. Visto che le norme $\|\cdot\|_N$ sono crescenti in $N$ una base di intorni di 0 in $\mathcal{D}_K$ è data dalle palle

$$rB_N = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \colon \|\varphi\|_N < r\}$$

al variare di $r > 0$ e $N \in \mathbb{N}$. Dunque $f$ è continuo su $\mathcal{D}_K$ se e solo se esistono $\varepsilon > 0$ ed $N \in \mathbb{N}$ tali che $f(\varepsilon B_N) \subset B_\mathbb{C} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Ma per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_K$ scelto $m = 2\|\varphi\|_N/\varepsilon$ si ha $\varphi/m \in \varepsilon B_N$ per cui:

$$|f[\varphi]| = m|f(\varphi/m)| \leq m = \frac{2}{\varepsilon}\|\varphi\|_N$$

come volevasi dimostrare. □

Diremo che una distribuzione $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ ha *ordine* $N$ se per ogni compatto $K$ di $\Omega$ esiste $c > 0$ tale che la relazione (2) risulti valida sempre con lo stesso $N$. Diremo che $f$ ha ordine infinito se tale $N$ non esiste. *ordine*

**Esempio 29** (delta di Dirac)**.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $x \in \Omega$. La* delta di Dirac *in $x$ è il funzionale $\delta_x$ definito su $\mathcal{D}(\Omega)$ da*

$$\delta_x[\varphi] := \varphi(x).$$

*Essendo*

$$|\delta_x[\varphi]| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_0$$

*possiamo concludere che $\delta_x \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione di ordine $N = 0$.*

**Esempio 30.** *Il funzionale*

$$f[\varphi] = \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi'(j), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

*è una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ di ordine 1. Infatti si ha, se $\varphi$ ha supporto compatto in $K = [0, n]$,*

$$|f[\varphi]| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} \varphi'(j) \right| \leq (n-2) \|\varphi\|_1.$$

*Si può verificare che tale distribuzione non ha ordine 0, in quanto è possible definire delle funzioni test $\varphi_k$ tutte con supporto in $[-1, 1]$ e tali che $\varphi_k'(0) = 1$ e $\|\varphi_k\|_0 \leq 1/k$. Su queste funzioni si avrà allora*

$$\frac{|f[\varphi_k]|}{\|\varphi_k\|_0} = k \to \infty.$$

**Esempio 31.** *Il funzionale*

$$f[\varphi] = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

*è una distribuzione di ordine infinito. Infatti, fissato $N$, è possibile definire una successione di funzioni test $\varphi_k$ tali che $\|\varphi_k\|_N \leq 1/k$ ma $\varphi_k^{(N+1)}(N + 1) = 1$.*

**Esempio 32** (funzioni $L^1_{loc}$ come distribuzioni)**.** *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Possiamo allora definire il funzionale (con abuso di notazione identificheremo la funzione $f \in L^1_{loc}$ con il funzionale lineare $f \colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$)*

$$f[\varphi] := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Chiaramente $\varphi \mapsto f[\varphi]$ è lineare (linearità dell'integrale) ed è continuo (di ordine 0), in quanto se $\varphi \in \mathcal{D}_K$ si ha*

$$|f[\varphi]| \leq \int_\Omega |f(x)| \cdot |\varphi(x)|\, dx \leq \|\varphi\|_0 \int_K |f(x)|\, dx.$$

*Nel seguito considereremo quindi $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.*

**Esempio 33** (misure come distribuzioni)**.** *Se $\mu$ è una misura (complessa) di Borel su $\Omega$, oppure una misura positiva localmente finita, allora posto (di nuovo con abuso di notazione usiamo lo stesso simbolo per la misura e per il funzionale lineare ad essa associato):*

$$\mu[\varphi] := \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*si ha che $\mu$ è una distribuzione di ordine 0. Dunque considereremo anche lo spazio delle misure su $\Omega$ come un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

**Esempio 34.** *Definiamo*

$$f[\varphi] = \int_0^1 \varphi(x, 0)\, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

*E' semplice verificare che $f$ è una distribuzione. In effetti è la distribuzione associata alla misura unidimensionale di lebesgue ristretta al segmento $[0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$.*

## 3.1 derivata di una distribuzione

Indichiamo con $D_k$ l'operatore $D_k = \partial/\partial x_k$, cosicché $D = (D_1, \dots, D_n)$. Ispirati dall'integrazione per parti, che per le funzioni $f \in C^1$ ci garantisce che

$$\int_\Omega (D_k f) \cdot \varphi \, dx = -\int_\Omega f \cdot D_k \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

se $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiamo $D_k f$ tramite la formula *derivata*

$$D_k f[\varphi] := -f[D_k \varphi].$$

E' facile convincersi che $D_k f$ è un operatore lineare e continuo. Inoltre se $f$ ha ordine $N$ la sua derivata ha ordine $N+1$.

Per $\alpha \in \mathbb{N}^n$, avendo definito $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ avremo

$$D^\alpha f[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} f[D^\alpha \varphi].$$

Chiaramente si ha $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta} = D^\beta D^\alpha$.

**Esempio 35.** *Consideriamo la funzione di* Heavyside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \leq 0, \\ 1 & \textit{se } x > 0. \end{cases}$$

*Osserviamo che $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e che la derivata di $H$ è nulla quasi ovunque. Se consideriamo la distribuzione associata ad $H$ e ne facciamo la derivata (cioè facciamo la derivata distribuzionale di $H$) otteniamo invece*

$$\begin{aligned} DH[\varphi] &= -H[D\varphi] = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\, dx \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -(0 - \varphi(0)) = \delta_0[\varphi]. \end{aligned}$$

*Dunque la derivata distribuzione di $H$ è una delta di Dirac nel punto di salto $x = 0$. (Curiosamente in questo caso sia $H$ che $DH$ hanno ordine $0$.)*

## 3.2 la topologia sullo spazio delle distribuzioni

Lo spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ è formato dai funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}(\Omega)$. E' usualmente chiamato *spazio duale* di $\mathcal{D}(\Omega)$ e la topologia che naturalmente viene utilizzata è la cosiddetta topologia debole-* cioè la topologia più debole che rende continui (su $\mathcal{D}'(\Omega)$) tutti i funzionali $\lambda_\varphi$ definiti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ da:

$$\lambda_\varphi[f] := f[\varphi].$$

Osserviamo ora che, in generale, se $\lambda$ è un funzionale lineare su uno spazio vettoriale $X$, allora $|\lambda|$ (definito da $|\lambda|(x) := |\lambda[x]|$) è una seminorma su $X$. Non solo: $\lambda$ è continuo se e solo se $|\lambda|$ è continua (è sufficiente la continuità in 0 che può essere verificata facilmente tramite la definizione).

Osserviamo ora che la famiglia di seminorme $\{|\lambda_\varphi| \colon \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ è separata. Infatti dato $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \neq 0$ significa esattamente che esiste $\varphi$ tale che $f[\varphi] \neq 0$. Dunque $|\lambda_\varphi|(f) = |f[\varphi]| \neq 0$.

Dunque la topologia debole-* induce su $\mathcal{D}'(\Omega)$ una topologia localmente convessa. La convergenza per questa topologia $f_k \to f$ è equivalente (per quanto visto nel Teorema 18) a richiedere che

$$|\lambda_\varphi|(f_k - f) \to 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ovvero *convergenza*

$$f_k[\varphi] \to f[\varphi], \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

In particolare si ottiene il seguente.

**Teorema 36.** *Se $f_k \to f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*

$$D^\alpha f_k \to D^\alpha f.$$

*Dimostrazione.* Banalmente

$$D^\alpha f_k[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} f_k[D^\alpha \varphi] \to (-1)^{|\alpha|} f[D^\alpha \varphi] = D^\alpha f[\varphi].$$

□

**Teorema 37.** *Se $f_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ esiste il limite*

$$f[\varphi] = \lim_k f_k[\varphi]$$

*allora $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Per dimostrare il teorema precedente dovremo utilizzare il seguente teorema, che assumiamo noto.

**Teorema 38** (Banach-Steinhaus)**.** *[1, 2.6] Sia $X$ uno spazio di Frechét (slc metrizzabile completo) e $Y$ uno svt. Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ una famiglia di operatori lineari e continui da $X$ in $Y$. Se per ogni $x$ in $X$ l'insieme*

$$\mathcal{F}(x) := \{l(x) \colon l \in \mathcal{F}\}$$

*è limitato in $Y$ allora $\mathcal{F}$ è equicontinuo ovvero per ogni $V$ intorno di $0$ in $Y$ esiste $U$ intorno di $0$ in $X$ tale che*

$$L[U] \subset V \qquad \forall L \in \mathcal{F}.$$

**Teorema 39.** *[1, 2.8] Sia $X$ uno spazio di Frechét (slc metrizzabile completo) e sia $Y$ uno svt. Se $L_k \in \mathcal{L}(X, Y)$ (mappe lineari continue) e se per ogni $x \in X$ esiste il limite*

$$L[x] = \lim_k L_k[x]$$

*allora $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ (anche $L$ è lineare e continuo).*

*Dimostrazione.* La linearità di $L$ segue dalla linearità dell'operazione di limite. Consideriamo la famiglia di operatori lineari $\mathcal{F} = \{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Siccome $L_k[x]$ è una successione convergente l'insieme dei suoi punti $\mathcal{F}(x) = \{L_k[x]\}_k$ è limitato. Dunque per il teorema di Banach-Steinhaus possiamo concludere che $\mathcal{F}$ è equilimitata ovvero per ogni $V$ intorno di $0$ in $Y$ esiste un $U$ intorno di $0$ in $X$ tale che $L_k[U] \subset V$ per ogni $k \geq 1$. Ma allora $L[U] \subset \overline{V}$ e dunque anche $L$ è continuo. □

*Dimostrazione Teorema 37.* Osserviamo che $\mathcal{D}(\Omega)$ non è uno spazio di Frechét (non essendo metrizzabile). Comunque la linearità di $f$ è ovvia (in quanto discende dalla additività del limite). Per dimostrare $f$ è continuo è sufficiente mostrare che $f$ è continuo su ogni $\mathcal{D}_K$ (Teorema 26). Ma $\mathcal{D}_K$ è in effetti uno spazio di Frechét e quindi il Teorema precedente si applica e ci garantisce che $f$ ristretto a $\mathcal{D}_K$ è continuo. □

## 3.3 PRODOTTO DI UNA DISTRIBUZIONE PER UNA FUNZIONE

Se $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $g \in \mathcal{E}(\Omega)$, allora se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha $g\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (in quanto $\operatorname{spt}(g\varphi) \subset \operatorname{spt}\varphi$) e quindi è ben definito il funzionale $gf$ su $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$(gf)[\varphi] := f[g\varphi], \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

E' chiaro che $gf$ è lineare. Verifichiamo che $gf$ è continuo. Per la regola di derivazione del prodotto, si può dimostrare che vale

$$D^\alpha(g\varphi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta g(x) D^{\alpha-\beta}\varphi(x)$$

con

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

dove si pone

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Si avrà dunque

$$\|D^\alpha(g\varphi)\|_0 \leq C_{|\alpha|}\|\varphi\|_{|\alpha|}$$

dove $C_N$ è una costante che dipende da $g$ (e terrà conto del massimo su $K$ di tutte le derivate fino all'ordine $N$ di $g$). Dunque

$$\|g\varphi\|_N \leq C_N\|\varphi\|_N.$$

Sapendo che $f$ è un funzionale continuo, sappiamo che per ogni compatto $K$ esistono $c > 0$ ed $N \in \mathbb{N}$ tali che

$$|f[\varphi]| \leq c\|\varphi\|_N.$$

Ma allora

$$|gf[\varphi]| = |f[g\varphi]| \leq c\|g\varphi\|_N \leq c \cdot C_N\|\varphi\|_N.$$

Dunque $gf \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Vogliamo ora dimostrare che vale la regola di Leibniz per $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $g \in \mathcal{E}(\Omega)$: *derivata del prodotto*

$$D_k(g \cdot f) = (D_k g) \cdot f + g \cdot D_k f$$

dove le derivate di $f$ e di $g \cdot f$ sono derivate distribuzionali (essendo $f$ e $g \cdot f$ distribuzioni) mentre la derivata di $g$ può essere intesa come la usuale derivata di una funzione $C^\infty$ (che comunque sappiamo coincidere con la derivata distribuzionale). Facciamo la verifica. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha:

$$\begin{aligned} D_k(gf)[\varphi] &= -gf[D_k\varphi] = -f[gD_k\varphi] = -f[D_k(g\varphi] - (D_k g)\varphi) \\ &= D_k f[g\varphi] + (D_k g)f[\varphi] = (gD_k f + (D_k g)f)[\varphi]. \end{aligned}$$

**Teorema 40.** *Se $f_k \to f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $g_k \to g$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ allora $g_k \cdot f_k \to g \cdot f$*

*Dimostrazione.* Osserviamo che si ha

$$g_k \cdot f_k - g \cdot f = (g_k - g) \cdot f_k + g \cdot (f_k - f).$$

Il secondo addendo chiaramente tende a zero in quanto $f_k \to f$. Per il primo addendo l'idea è quella di sfruttare la limitatezza delle $f_k$ e quindi il teorema di Banach-Steinhaus.

Fissiamo un compatto $K$ di $\Omega$ e consideriamo su $\mathcal{D}_K$ la famiglia di funzionali lineari $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Visto che $f_k[\varphi] \to f[\varphi]$ sappiamo che $\mathcal{F}$ è puntualmente limitata, dunque per il Teorema 38 risulta essere equicontinua: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $U$ intorno di 0 in $\mathcal{D}_K$ tale che per ogni $\varphi \in U$ si ha $|f_k[\varphi]| < \varepsilon$. D'altra parte, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_K$ si ha $(g_k - g) \cdot \varphi \to 0$ e dunque per $k$ abbastanza grande si avrà $(g_k - g) \cdot \varphi \in U$. Dunque

$$(g_k - g) \cdot f_k[\varphi] = f_k((g_k - g) \cdot \varphi) \in f[U] \subset B_\varepsilon(0).$$

Questo significa che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha $(g_k - g) \cdot f_k[\varphi] \to 0$ che è quanto volevamo dimostrare. □

## 3.4 LOCALIZZAZIONE E SUPPORTO

Se $\omega \subset \Omega$ sono aperti di $\mathbb{R}^n$ ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ può essere estesa a zero su $\Omega \setminus \omega$ e diventa quindi una funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Possiamo quindi considerare che $\mathcal{D}(\omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ (e l'inclusione è ovviamente continua). Dunque c'è anche una inclusione naturale $\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\omega)$ in quanto ogni $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ essendo una funzione su $\mathcal{D}(\Omega)$ può essere ristretta a $\mathcal{D}(\omega)$. Anche tale inclusione è ovviamente continua.

Se $f \in \mathcal{D}'(U)$ e $g \in \mathcal{D}'(V)$ sono distribuzioni definite sugli aperti $U$ e $V$ di $\mathbb{R}^n$, diremo che $f = g$ su un aperto $\omega \subset U \cap V$ se $f[\varphi] = g[\varphi]$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con $\operatorname{spt} \varphi \subset \omega$.

Vogliamo ora verificare come sia possibile ricostruire una distribuzione su $\Omega$ conoscendo la sua restrizione su un ricoprimento aperto di $\Omega$.

**Teorema 41** (partizione dell'unità)**.** *[1, 6.20] Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}^n$ la cui unione è un aperto $\Omega$. Allora esistono $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che*

1. *$\psi_i \geq 0$;*
2. *ogni $\psi_i$ ha supporto in qualche $\omega \in \mathcal{F}$;*
3. *per ogni $x \in \Omega$*
$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1 \tag{3}$$
4. *per ogni $K$ compatto di $\Omega$ esiste un aperto $W$ con $K \subset W \subset \Omega$ ed esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in W$ e per ogni $i > M$ si ha $\psi_i(x) = 0$ (ovvero la somma in (3) ha solo un numero finito di addendi non nulli).*

*Dimostrazione.* Sia $S$ un denso numerabile in $\Omega$. Consideriamo le palle $B_i$ che hanno centro in $S$, hanno raggio razionale e sono contenute in un qualche aperto della famiglia $\mathcal{F}$. Tale famiglia $B_i$ di palle è numerabile, e le palle di raggio la metà le chiamiamo $V_i$. Chiaramente le $V_i$ ricoprono ogni aperto della famiglia e quindi tutto $\Omega$.

Per ogni indice $i$ consideriamo una funzione $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ che vale 1 su $V_i$ e vale 0 fuori da $B_i$ (come costruito nell'esempio ...). Definiamo le funzioni $\varphi_i$ per induzione su $i \in \mathbb{N}$. Poniamo $\psi_0 = \varphi_0$ e poi:

$$\psi_{i+1} = (1-\varphi_0)(1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_i)\varphi_{i+1}.$$

E' facile verificare, per induzione, che per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha

$$\psi_0 + \dots + \psi_i = 1 - (1-\varphi_0)\dots(1-\varphi_i).$$

Osserviamo ora che se $x \in V_i$ allora dalla relazione precedente si ottiene

$$\psi_0(x) + \dots + \psi_i(x) = 1$$

e dunque per ogni $j > i$ si ha $\psi_j(x) = 0$. Quindi solo un numero finito di funzioni $\psi$ è non nulla nel punto $x$.

Se ora prendiamo un compatto $K \subset \Omega$ dal ricoprimento fatto con le $V_i$ possiamo estrarre un ricoprimento finito. In particolare esisterà un $m \in \mathbb{N}$ tale che $V_1, \dots, V_m$ ricoprono $K$. Allora per ogni $x \in V_1 \cup \dots \cup V_m$ si avrà

$$\psi_0(x) + \dots + \psi_m(x) = 1.$$

□

**Teorema 42** (localizzazione delle distribuzioni)**.** *Supponiamo $\mathcal{F}$ sia una famiglia di aperti tali che per ogni $\omega \in \mathcal{F}$ è definita una distribuzione $f_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$. Supponiamo che dati $\omega, \omega' \in \mathcal{F}$ si abbia*

$$f_\omega[\varphi] = f_{\omega'}[\varphi] \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega \cap \omega').$$

*Allora, posto $\Omega = \bigcup \mathcal{F}$, esiste una unica $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che per ogni $\omega \in \mathcal{F}$*

$$f[\varphi] = f_\omega[\varphi] \qquad \forall \varphi \in D(\omega).$$

*Dimostrazione.* Sia $\psi_i$ una partizione dell'unità come costruita nel Teorema 41 e sia $\omega_i \in \mathcal{F}$ un aperto che contiene il supporto di $\psi_i$. Data qualunque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha $\varphi = \sum_i \psi_i \varphi$ e solo un numero finito di addendi è diverso da zero in quanto $\varphi$ ha supporto compatto. Definiamo:

$$f[\varphi] = \sum_i f_{\omega_i}[\psi_i \varphi].$$

Chiaramente $f$ è lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$. Verifichiamo che è anche continuo. Se prendiamo $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ sappiamo esistere un compatto $K$ di $\Omega$ che contiene i supporti di ogni $\varphi_j$. Allora (per quanto visto nel Teorema 41) esiste un intero $m$ tale che

$$f[\varphi_j] = \sum_{i=0}^m f_{\omega_i}[\psi_i \varphi_j], \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Ma $\psi_i \varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\omega_i)$ quindi $f_{\omega_i}[\psi_i \varphi_j] \to 0$ per ogni $i$ da cui segue $f[\varphi_j] \to 0$. Dunque $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Per mostrare che $f$ coincide con $f_\omega$ su ogni $\omega \in \mathcal{F}$ osserviamo che data $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ si ha $\psi_i \varphi \in \mathcal{D}(\omega_i \cap \omega)$ e dunque, per ipotesi, $f_{\omega_i}[\psi_i \varphi] = f_\omega[\psi_i \varphi]$ da cui

$$f[\varphi] = \sum_i f_\omega[\psi_i \varphi] = f_\omega\big[\sum_i \psi \varphi\big] = f_\omega[\varphi].$$

L'unicità di $f$ è garantita dal fatto che l'equazione che definisce $f$ deve necessariamente essere valida. □

**Corollario 43.** *Siano $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e supponiamo che $f = g$ in $\mathcal{D}'(\omega)$ per ogni $\omega$ in una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti di $\Omega$. Se $\bigcup \mathcal{F} = \Omega$ allora $f = g$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente esiste una unica distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$ che coincide con $f$ su ogni $\omega \in \mathcal{F}$. Dunque $f = g$. □

**Definizione 44.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definiamo il* supporto *di $f$ come*

$$\operatorname{spt} f = \Omega \setminus \bigcup \{\omega \subset \Omega \colon \omega \text{ aperto e } f = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\omega)\}.$$

Per come è definito il supporto, e per il corollario precedente, possiamo affermare che $f = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \operatorname{spt}(f))$.

**Teorema 45.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia $S = \operatorname{spt} f$.*

1. *se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\operatorname{spt} \varphi$ è disgiunto da $S$ allora $f[\varphi] = 0$;*
2. *se $S = \emptyset$ allora $f = 0$;*
3. *se $g \in \mathcal{E}(\Omega)$ e $g = 1$ su un aperto contenente $S$ allora $g \cdot f = f$;*
4. *se $S$ è compatto allora esistono $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che*

$$|f[\varphi]| \le C \|\varphi\|_N.$$

*In particolare $f$ ha ordine $N$ finito.*

Per la dimostrazione ci servirà il seguente.

**Teorema 46.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $K$ un compatto in $\Omega$. Allora esiste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e un aperto $\omega \supset K$ tale che $\varphi(x) = 1$ per ogni $x \in \omega$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{F}_1 = \{B_\rho(x) \colon \overline{B_\rho(x)} \subset \Omega\}$ la famiglia di tutte le palle aperte la cui chiusura è contenuta in $\Omega$. Da $\mathcal{F}_1$ possiamo estrarre un ricoprimento finito $\mathcal{F}_2 = \{B_1, \dots, B_N\}$ di palle che ricoprono $K$. Allora posto $B_0 = \Omega \setminus K$ si ha che $\mathcal{F} = \{B_0, B_1, \dots, B_N\}$ è un ricoprimento finito di $\Omega$. Allora possiamo trovare una partizione dell'unità formata da funzioni $\psi_i$ con supporto in $B_i$ e tali che $\sum_{i=0}^N \psi_i(x) = 1$. Definiamo $\varphi = \sum_{i=1}^N \psi_i$. Chiaramente $\operatorname{spt} \varphi \subset \bigcup_{i=1}^N B_i$ è un compatto di $\Omega$, dunque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Posto $C = \operatorname{spt} \psi_0$ si ha che $\varphi = 1$ su $\omega = \Omega \setminus C$ (in quanto $\psi_0 = 0$ su $\Omega \setminus C$). Ma $C$ è un chiuso contenuto in $B_0$ cioè un chiuso disgiunto da $K$ dunque $\omega \supset K$. □

*Dimostrazione Teorema 45.* 1. se il supporto di $\varphi$ non interseca $S$ possiamo dire che $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus S)$. Ma $f = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega \setminus S)$.

2. Ovvio in quanto $f = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega \setminus S)$.

3. Sia $\omega \supset S$ l'aperto su cui $g = 1$. Allora posto $\omega' = \Omega \setminus S$ si ha $\omega \cup \omega' = \Omega$. Chiaramente $f = 0 = gf$ in $\mathcal{D}'(\omega')$ mentre $g \cdot f = 1 \cdot f = f$ in $\mathcal{D}'(\omega)$. Ma allora $f = g \cdot f$ su tutto $\Omega$.

4. Se $S$ è compatto esisterà (per il teorema precedente) $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ che vale identicamente 1 su $S$. Allora si avrà $f = g \cdot f$ per quanto visto prima. Inoltre per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avremo che $g \cdot \varphi \in \mathcal{D}_K$ dove $K$ è il supporto di $g$. Ma su $\mathcal{D}_K$ vale una stima del tipo:

$$|f[g \cdot \varphi]| \leq c \|g \cdot \varphi\|_N$$

con qualche $c > 0$ e $N \in \mathbb{N}$. E, per la formula di Leibniz, $\|g \cdot \varphi\|_N \leq c' \|\varphi\|_N$. Dunque per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha

$$|f[\varphi]| = |g \cdot f[\varphi]| = |f[g\varphi]| \leq cc' \|\varphi\|_N.$$

□

Il seguente teorema caratterizza $\mathcal{E}'(\Omega)$ come il sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni a supporto compatto. $\mathcal{E}'(\Omega)$

**Teorema 47.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione a supporto compatto. Allora $f$ si estende con continuità, in modo unico, a tutto $\mathcal{E}(\Omega)$. Viceversa ogni $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ è anche in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ed ha supporto compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ a supporto compatto e consideriamo una funzione $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $f = \psi f$ come nel teorema precedente. Allora possiamo definire $\tilde{f}$ su $\mathcal{E}$ mediante la seguente:

$$\tilde{f}[\varphi] = f[\psi\varphi]$$

infatti $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Chiaramente $\tilde{f}$ risulta continuo in quanto se $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ allora $\psi\varphi_k$ hanno tutte supporto contenuto in $K = \operatorname{spt}\psi$ e $\psi\varphi_k \to \psi\varphi$ in $\mathcal{D}_K$.

Per l'unicità è sufficiente osservare che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$. Consideriamo infatti una successione di compatti $K_j$ che invadono $\Omega$ e prendiamo una successione $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ di funzioni che valgono identicamente 1 su $K_j$. Data una qualunque $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ si ha $\psi_k\varphi \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ con $\psi_k\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Viceversa se $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$ allora $f$ può essere ristretta a $\mathcal{D}(\Omega)$ e chiaramente risulta $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Supponiamo per assurdo che $f$ non abbia supporto compatto. Prendiamo una successione crescente di compatti $K_j$ che invadono tutto $\Omega$. Se $f$ non ha supporto compatto esisteranno $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che $\operatorname{spt}\varphi_j \subset \Omega \setminus K_j$ e $f[\varphi_j] \neq 0$. Dividendo $\varphi_j$ per $f[\varphi_j]$ possiamo anzi supporre che $f[\varphi_j] = 1$. Ma ora osserviamo che $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ in quanto, ricordiamo, la topologia di $\mathcal{E}$ richiede la convergenza uniforme su ogni compatto ma, su ogni compatto, la successione $\varphi_j$ è definitivamente nulla. Dunque per continuità si dovrebbe avere $1 = f[\varphi_j] \to f[0] = 0$ che è assurdo. □

**Teorema 48.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $p \in \Omega$. Se* $\operatorname{spt} f \subset \{p\}$

$$f = \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha D^\alpha \delta_p$$

*con $N \in \mathbb{N}$ e $c_\alpha \in \mathbb{C}$.*

Per la dimostrazione ci servirà il seguente risultato puramente algebrico

**Teorema 49.** *Sia $X$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Siano $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ funzionali lineari su $X$ e sia $V = \{x \in X \colon \xi_k(x) = 0, k = 1, \dots, n\}$. Se $\xi$ si annulla su $V$ allora $\xi$ è combinazione lineare dei $\xi_1, \dots, \xi_n$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo l'operatore lineare $\xi \colon X \to \mathbb{K}^n$ definito da

$$\xi[x] = (\xi_1[x], \dots, \xi_n[x]).$$

Per ipotesi sappiamo che $\ker \xi \subset \ker \xi_0$. Questo significa che è possibile definire una mappa lineare $f \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\xi_0"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, dashed, "f"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Cioè, posto $f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ si avrà

$$\xi_0[x] = f[\xi[x]] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i[x]$$

come si doveva dimostrare. □

*Dimostrazione Teorema 48.* Supponiamo per semplicità $p = 0$.

Per un teorema precedente sappiamo che $f$, avendo supporto compatto, ha ordine finito $N \in \mathbb{N}$, cioé

$$|f[\varphi]| \le C\|\varphi\|_N \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

In base al teorema algebrico appena enunciato sarà sufficiente dimostrare che $f$ si annulla su tutte le funzioni test su cui si annullano le distribuzioni $D^\alpha\delta$ ovvero sulle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che $D^\alpha\varphi(0) = 0$ per $|\alpha| \le N$.

Sia $g$ una funzione con supporto in $B_2(0)$ tale che $g = 1$ su $B_1(0)$. Consideriamo quindi $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon)$ cosicché $g_\varepsilon$ ha supporto in $B_{2\varepsilon}(0)$. Visto che $g_\varepsilon = 1$ in un intorno del supporto di $f$ per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f = g_\varepsilon f$, dunque possiamo fare la seguente stima (si utilizza la formula di Leibniz per le derivate del prodotto)

$$\begin{aligned} |f[\varphi]| = |f[g_\varepsilon\varphi]| &\le C\|g_\varepsilon\varphi\|_N \le C \max_{|x|\le 2\varepsilon} \max_{|\alpha| \le N} |D^\alpha(g_\varepsilon\varphi)(x)| \\ &\le C \max_{|x|\le 2\varepsilon} \max_{|\alpha|\le N} \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|D^\beta g_\varepsilon(x)\right| \cdot \left|D^{\alpha-\beta}\varphi(x)\right|. \end{aligned} \tag{4}$$

Dobbiamo dunque stimare le derivate di $g_\varepsilon$ e le derivate di $\varphi$.

Fissata una funzione $\varphi$ tale che $D^\alpha\varphi(0) = 0$ per ogni $|\alpha| \leq N$, dato $\eta > 0$ per continuità dovrà esistere un $\rho > 0$ tale che

$$|D^\alpha\varphi(x)| \leq \eta \qquad \text{se } |x| \leq \rho \text{ e } |\alpha| = N.$$

Avendo una stima sulla derivata di ordine massimo possiamo stimare le derivate più basse, scrivendole come integrale delle derivate successive (o con Lagrange). Ricordando che la funzione e le derivate si annullano in 0, si otterrà una stima del tipo:

$$|D^\alpha\varphi(x)| \leq c\eta|x|^{N-|\alpha|} \qquad \forall|x| \leq \rho.$$

Importante notare che la costante $c$ (come quelle che verranno introdotte in seguito) non dipende da $\varphi$.

Per la funzione $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon)$ si avranno invece le seguenti stime (in quanto ad ogni derivata "esce" un fattore $1/\varepsilon$)

$$|D^\alpha g_\varepsilon(x)| \leq \frac{c'}{\varepsilon^{|\alpha|}}.$$

Riprendendo la stima (4) si ha dunque, per ogni $\varepsilon < \rho/2$,

$$\begin{aligned} |f[\varphi]| &\leq C \max_{|\alpha|\leq N} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \frac{c'}{\varepsilon^{|\beta|}} c\eta(2\varepsilon)^{N-|\alpha|+|\beta|} \\ &\leq c''\eta \max_{|\alpha|\leq N} \sum_{\beta\leq\alpha} \varepsilon^{N-|\alpha|} \leq c'''\eta. \end{aligned}$$

Essendo $\eta$ arbitrariamente piccolo dovrà essere $|f[\varphi]| = 0$. $\square$

## 3.5 DISTRIBUZIONE COME DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Vedremo ora che ogni distribuzione è la derivata $\alpha$-esima di una funzione continua $f$. Questo significa che se volevamo avere uno spazio di funzioni generalizzate contenente le funzioni continue e tale che ogni funzione generalizzata risulti derivabile, allora lo spazio delle distribuzioni che abbiamo definito è il più piccolo possibile.

**Teorema 50.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una qualunque distribuzione e sia $K$ un compatto di $\Omega$. Allora esiste una funzione $g \in C^0(\Omega)$ tale che*

$$f[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x) D^\alpha\varphi(x)\, dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}_K$$

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità possiamo supporre che $K \subset Q = [0,1]^n$ (in caso contrario si potrà traslare e riscalare $\Omega$ in modo che entri nel cubo $Q$). Data $\varphi \in \mathcal{D}_K$ considereremo quindi $\varphi$ estesa a zero fuori da $K$ in modo che risulti $\varphi \in \mathcal{D}_Q$.

Osserviamo innanzitutto che ogni derivata di $\varphi$ può essere stimata con una qualunque derivata di ordine superiore (disuguaglianza di Poincaré). Dal teorema di Lagrange sappiamo infatti che per ogni $x \in Q$ esiste $y_1 \in [0,1]$ tale che:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = D_1\varphi(y_1, x_2, \ldots, x_n)$$

da cui

$$\|\varphi\|_0 \leq \|D_1\varphi\|_0.$$

Ripetendo in tutte le direzioni, anche per le derivate successive, si ottiene, per ogni $N \in \mathbb{N}$, posto $\mathbf{N} = (N, \dots, N)$

$$\|\varphi\|_N \leq \left\|D^{\mathbf{N}}\varphi\right\|_0.$$

Data $\varphi \in \mathcal{D}_Q$, osserviamo ora che per $x \in Q$ vale

$$\varphi(x) = \int_0^{x_1} D_1\varphi(y_1, x_2, \dots, x_n)\, dy_1$$

che ripetuto su ogni direzione, ci permette di concludere

$$\varphi(x) = \int_{Q(x)} D^{\mathbf{1}}\varphi(y)\, dy \tag{5}$$

dove $Q(x) = [0, x_1] \times \cdots \times [0, x_n]$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. In particolare si avrà (stima della norma uniforme con la norma $L^1$ delle derivate)

$$\|\varphi\|_0 \leq \int_Q \left|D^{\mathbf{1}}\varphi(x)\right| dx.$$

Ora sappiamo che fissato $K$ esistono $c > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_K$

$$|f[\varphi]| \leq c\|\varphi\|_N.$$

Utilizzando le stime precedenti si ottiene dunque una stima di $f$ tramite la norma $L^1$ delle derivate $(\mathbf{N}+\mathbf{1})$-esime:

$$|f[\varphi]| \leq c\left\|D^{\mathbf{N}}\varphi\right\|_0 \leq \int_Q \left|D^{\mathbf{N}+\mathbf{1}}\varphi(x)\right| dx. \tag{6}$$

Osserviamo ora che l'operatore $D^{\mathbf{1}} \colon \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_K$ è iniettivo per (5). Anche $D^{\mathbf{N}+\mathbf{1}} = (D^{\mathbf{1}})^{N+1}$ è dunque iniettivo. Di conseguenza posto

$$V = D^{\mathbf{N}+\mathbf{1}}(\mathcal{D}_K) = \{D^{\mathbf{N}+\mathbf{1}}\varphi \colon \varphi \in \mathcal{D}_K\}$$

è possibile trovare un funzionale lineare $L \colon V \to \mathbb{C}$ che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_K \arrow[r, "D^{\mathbf{N}+\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, dashed, "L"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

cioè tale che

$$L[D^{\mathbf{N}+\mathbf{1}}\varphi] = f[\varphi].$$

Osserviamo ora che $L$ risulta continuo rispetto alla norma di $L^1(Q)$, infatti da (6), si ottiene

$$|L[\psi]| \leq \int_Q |\psi(x)|\, dx.$$

Grazie al Teorema di Hahn-Banach (supposto noto) possiamo estendere $L$ ad un funzionale lineare e continuo $\tilde{L}$ definito su tutto $L^1(Q)$.

Dunque $\tilde{L}$ si può rappresentare (identificazione del duale di $L^1$ con $L^\infty$, supposto noto) tramite una funzione $h \in L^\infty(Q)$:

$$\tilde{L}(\psi) = \int_Q h(x)\psi(x)\,dx.$$

Si ottiene dunque:

$$f[\varphi] = L[D^{\mathbf{N+1}}\varphi] = \int_Q h(x)D^{\mathbf{N+1}}\varphi(x)\,dx.$$

Per ottenere una funzione di classe $C^0$ facciamo una ulteriore integrazione:

$$g(x) := \int_{Q(x)} h(y)\,dy.$$

Per la proprietà di continuità dell'integrale risulta che $g$ è una funzione continua (anzi lipschitziana) su $Q$. Vogliamo mostrare che la derivata distribuzionale $D^{\mathbf{1}}f$ è uguale a $h$ (in analogia con quanto succedeva per le funzioni regolari). Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_Q$ si ha infatti (applicando Fubini-Tonelli)

$$\begin{aligned}\int_Q g(x)D^{\mathbf{1}}\varphi(x)\,dx &= \int_Q \left(\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n} h(y)\,dy_1,\dots,dy_n\right) D^{\mathbf{1}}\varphi(x)\,dx\\ &= \int_Q h(y)\left(\int_{y_1}^1\cdots\int_{y_n}^1 D^{\mathbf{1}}\varphi(x)\,dx_1,\dots,dx_n\right)dy\\ &= (-1)^n\int_Q h(y)\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

Dunque

$$f[\varphi] = \int_Q h(x)D^{\mathbf{N+1}}\varphi(x)\,dx = (-1)^n\int_Q g(x)D^{\mathbf{N+2}}\varphi(x)\,dx.$$

A meno di un segno, che può essere incorporato nella funzione $g$, abbiamo quindi dimostrato il teorema. □

**Teorema 51.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione con supporto in un compatto $K$ contenuto nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sia $V$ un qualunque aperto contenente $K$ (e contenuto in $\Omega$). Allora*

$$f = \sum_{k=1}^m D^{\alpha_k} g_k$$

*con $g_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ le distribuzioni associate a opportune funzioni continue $g_k\colon \Omega \to \mathbb{C}$ ognuna con supporto contenuto in $V$ e $\alpha_k \in \mathbb{N}^n$, $k = 1,\dots,m$ con $m \in \mathbb{N}$.*

*Dimostrazione.* Sia $W$ un aperto contenente $K$ a chiusura compatta in $\Omega$. Sia $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una funzione che vale identicamente 1 su $K$ e con supporto in $W$. Allora, per il teorema precedente applicato al compatto $\overline{W}$, sappiamo che esiste $g \in C^0(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tali che (essendo $\psi\varphi$ a supporto in $W$ ed essendo $f$ a supporto in $K$) si ha

$$f[\psi\varphi] = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)D^\alpha(\psi\varphi)(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Per la regola di Leibniz abbiamo:

$$D^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\psi(x) D^\beta\varphi(x)$$

da cui, ricordando che $\psi f = f$, e posto

$$g_\beta = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} g(x) D^{\alpha-\beta}\psi(x)$$

si ha

$$\begin{aligned} f[\varphi] = f[\psi\varphi] &= \sum_{\beta\le\alpha}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)D^{\alpha-\beta}\psi(x)D^\beta\varphi(x)\,dx \\ &= \sum_{\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}\int_\Omega g_\beta(x)D^\beta\varphi(x)\,dx \\ &= \sum_{\beta\le\alpha} D^\beta g_\beta[\varphi]. \end{aligned}$$

□

**Teorema 52.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esistono $g_\alpha \in C^0(\Omega)$ tali che su ogni compatto solamente un numero finito di funzioni $g_\alpha$ non si annulla, e si ha:*

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} D^\alpha g_\alpha.$$

*Dimostrazione.* Siano $V_j$, $j \in \mathbb{N}$, una famiglia crescente di aperti a chiusura compatta in $\Omega$ tali che la loro unione sia tutto $\Omega$. Consideriamo la corrispondente partizione dell'unità, formata dalle funzioni $\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ ognuna con supporto contenuto in $V_j$.

Si avrà allora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (ricordando che sul supporto di $\varphi$ solo un numero di addendi è diverso da zero nella somma $\sum_j \psi_j(x) = 1$)

$$f[\varphi] = f[\sum_j \psi_j\varphi] = \sum_j f[\psi_j\varphi] = \sum_j \psi_j f[\varphi].$$

Ora sappiamo che $\psi_j f$ è una distribuzione a supporto compatto in $\overline{V_j}$ e quindi possiamo applicare il teorema precedente per ottenere

$$\psi_j f = \sum_{k=1}^{m_j} D^{\alpha_{kj}} g_{kj}.$$

Si ottiene dunque il risultato atteso:

$$f = \sum_j\sum_k D^{\alpha_{kj}} g_{kj}.$$

□

I seguenti teoremi caratterizzano le misure come le distribuzioni positive. Se $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è una distribuzione diremo che $f$ è non negativa, $f \ge 0$, se per ogni $\varphi \ge 0$ (ovvero $\varphi(x) \ge 0$ per ogni $x \in \Omega$) si ha $f[\varphi] \ge 0$. *distribuzioni positive*

**Teorema 53.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione non negativa a supporto compatto. Allora esiste una misura non-negativa, finita, $\mu$ tale che*

$$f[\varphi] = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x).$$

*Dimostrazione.* Sia $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ una funzione non negativa tale che $g = 1$ su un aperto contenente $K = \operatorname{spt} f$. Allora si ha $f = gf$.

Osserviamo ora che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$-\|\varphi\|_0 \cdot g(x) \le \varphi(x) \cdot g(x) \le \|\varphi\|_0 \cdot g(x)$$

da cui le funzioni $(\|\varphi\|_0 - \varphi) \cdot g$ e $(\varphi + \|\varphi\|_0) \cdot g$ risultano essere non negative. Dunque, dalla non negatività di $f$, si ottengono le seguenti stime

$$-\|\varphi\|_0 \cdot f[g] \le f[g \cdot \varphi] \le \|\varphi\|_0 \cdot f[g]$$

ovvero $f$ ha ordine 0:

$$|f[\varphi]| = |f[g \cdot \varphi]| \le f[g]\|\varphi\|_0.$$

Dunque $f$ può essere esteso come funzionale lineare continuo a tutto lo spazio $C^0(\Omega)$ e può quindi essere rappresentato (nota la dualità delle misure con le funzioni continue) tramite una misura:

$$f[\varphi] = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x).$$

La misura $\mu$ è necessariamente reale non negativa, in quanto $\mu(\chi_B)$ è positivo quando $\chi_B$ è la funzione caratteristica di un insieme $B$. □

**Teorema 54.** *Sia $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione non negativa. Allora esiste una misura non negativa, $\sigma$-finita $\mu$ tale che*

$$f[\varphi] = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x).$$

*Dimostrazione.* Si invade $\Omega$ con una successione crescente di aperti $V_j$ a chiusura compatta in $\Omega$. Allora esistono $\psi_j$ con supporto in $V_j$ partizione dell'unità: $\sum_j \psi_j = 1$.

La distribuzione $\psi_j f$ è a supporto compatto e quindi, per il teorema precedente, si rappresenta tramite una misura finita $\mu_j$:

$$\psi_j f[\varphi] = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu_j(x).$$

Ma allora, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha (le somme essendo finite visto che $\varphi$ ha supporto compatto)

$$f[\varphi] = f\big(\sum_j \psi_j \varphi\big) = \sum_j \psi_j f[\varphi] = \sum_j \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu_j(x) = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x)$$

con $\mu = \sum_j \mu_j$. E risulta in effetti che $\mu$ è finito su ogni $V_j$. □

## 3.6 convoluzioni

Sulle funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^n$ possiamo definire l'operazione di convoluzione. Cercheremo di estendere tale operazione anche alle distribuzioni.

Se $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo $\tau_x\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ come $\tau_x\varphi$

$$\tau_x\varphi(y) := \varphi(y-x)$$

l'operatore che trasla il grafico di $u$ lungo il vettore $x$. Definiamo inoltre $\check{\varphi}$

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Definiamo allora la convoluzione tra le funzioni $u$ e $v$, come la funzione definita da: $\varphi * \psi$

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\tau_x\check{\psi}$$

nelle opportune condizioni per cui l'integrale converga (ad esempio se $\varphi \in C^\infty$ e $\psi \in C^\infty_c$ o viceversa). Tramite un cambio di variabile nell'integrale è facile mostrare che $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

Poniamo ora $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per analogia possiamo definire per $f \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$, oppure per $f \in \mathcal{E}'$ e $\varphi \in \mathcal{E}$: $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ $f * \varphi$

$$(f * \varphi)(x) := f[\tau_x\check{\varphi}]$$

cosicché $f * \varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Ovviamente se $\varphi \in \mathcal{E}$ e $\psi \in \mathcal{D}$ si può considerare la distribuzione $f \in \mathcal{D}'$ associata a $\varphi$ e la distribuzione $g \in \mathcal{E}'$ associata a $\psi$, in tal caso si avrà: $f * \psi = \varphi * \psi = g * \varphi$. Possiamo anche definire la traslazione e il simmetrico di una distribuzione $f \in \mathcal{D}'$ o $f \in \mathcal{E}'$, mediante le seguenti relazioni:

$$\tau_x f[\varphi] := f[\tau_{-x}\varphi], \qquad \check{f}[\varphi] := f[\check{\varphi}]$$

con $\varphi \in \mathcal{D}$. E' facile verificare che $\tau_x f$ e $\check{f}$ sono anch'esse distribuzioni. Una semplice verifica ci dice inoltre che

$$(f * \varphi)(x) = \tau_x\check{f}[\varphi].$$

E' anche facile verificare che

$$(f * \varphi)\check{} = \check{f} * \check{\varphi}.$$

**Teorema 55.** *Siano $f \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$ oppure $f \in \mathcal{E}'$ e $\varphi \in \mathcal{E}$. Allora $\tau_x(f * \varphi) = (\tau_x f) * \varphi = f * (\tau_x\varphi)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Dimostrazione.* Basta applicare le definizioni per ottenere che ognuna delle tre espressioni è uguale a $f[\tau_{y-x}\check{\varphi}]$ (si userà in particolare che $(\tau_x\varphi)\check{} = \tau_{-x}\check{\varphi}$). □

**Teorema 56.** *Siano $f \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$ oppure $f \in \mathcal{E}'$ e $\varphi \in \mathcal{E}$. Allora $\operatorname{spt}(f * \varphi) \subset \operatorname{spt} f + \operatorname{spt}\varphi$ (in particolare se $f \in \mathcal{E}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$ allora $f * \varphi \in \mathcal{D}$).*

*Dimostrazione.* Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $(f * \varphi)(x) = f[\tau_x \check{\varphi}] \neq 0$. Allora significa che $\operatorname{spt} f$ e $\operatorname{spt} \tau_x \check{\varphi}$ hanno intersezione non vuota. Ma $\operatorname{spt} \tau_x \check{\varphi} = x - \operatorname{spt} \varphi$ e dunque otteniamo che $x \in \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} \varphi$. Dunque $\operatorname{spt}(f * \varphi) \subset \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} \varphi$. E se $f \in \mathcal{E}'$ allora $f$ ha supporto compatto, dunque se anche $\varphi$ ha supporto compatto pure $f * \varphi$ ha supporto compatto. □

**Teorema 57.** *Siano $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$. Allora*

$$(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi).$$

*Inoltre risulta*

$$f * \varphi[\psi] = f[\check{\varphi} * \psi].$$

*Dimostrazione.* La seconda affermazione discende immediatamente dalla prima, in quanto

$$\begin{aligned} f * \varphi[\psi] &= \int (f * \varphi)(x) \cdot \psi(x)\, dx = \int (f * \varphi)(x) \cdot \check{\psi}(0 - x)\, dx \\ &= ((f * \varphi) * \check{\psi})(0) = (f * (\varphi * \check{\psi}))(0) = f[\check{\varphi} * \psi]. \end{aligned}$$

Sia $z \in \mathbb{R}^n$ fissato. Si ha:

$$\begin{aligned} ((f * \varphi) * \psi)(z) &= \int (f * \varphi)(x) \cdot \psi(z - x)\, dx \\ &= \int f[\tau_x \check{\varphi}] \cdot \psi(z - x)\, dx \\ &= \int f[\psi(z - x) \cdot \tau_x \check{\varphi}]\, dx \\ &= \int f[y \mapsto \psi(z - x) \varphi(x - y)]\, dx \\ &= \int f[\Phi(x)]\, dx \end{aligned}$$

dove $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}$ è definita da

$$\Phi(x)(y) := \psi(z - x) \varphi(x - y).$$

D'altro canto

$$\begin{aligned} (f * (\varphi * \psi))(z) &= f[\tau_z (\varphi \check{*} \psi)] \\ &= f[y \mapsto (\varphi * \psi)(z - y)] \\ &= f\big[y \mapsto \int \varphi(x) \psi(z - y - x)\, dx\big] \\ &= f\big[y \mapsto \int \varphi(x - y) \psi(z - x)\, dx\big] \\ &= f\big[y \mapsto \int \Phi(x)(y)\, dx\big]. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\Phi(x) = 0$ se $z - x \notin \operatorname{spt} \psi$ ovvero se $x \notin z - \operatorname{spt} \psi$. Dunque $\operatorname{spt} \Phi \subset J := z - \operatorname{spt} \psi$. Inoltre se $x \in J$ si ha che $\Phi(x)(y) = 0$ se $x - y \notin \operatorname{spt} \varphi$ ovvero se $y \notin x - \operatorname{spt} \varphi$. Dunque $\operatorname{spt} \Phi(x) \subset x - \operatorname{spt} \varphi \subset K := J - \operatorname{spt} \varphi$. Dunque $\Phi(x) \in \mathcal{D}_K$ e si ha

$$J \xrightarrow{\Phi} \mathcal{D}_K \xrightarrow{f} \mathbb{C}.$$

Per quanto riguarda l'integrale $\int f[\Phi(x)]\,dx$ possiamo approssimare uniformemente la funzione $f \circ \Phi \colon J \to \mathbb{C}$ con le funzioni

$$\sum_{i=1}^{N} f[\Phi(x_i^k)]\chi_{Q_i^k}$$

dove $Q_i^k$ sono dei cubi di lato $1/k$ centrati in $x_i^k$ a due a due con parte interna disgiunta e che ricoprono tutto $J$. Si ha allora

$$\int f[\Phi(x)]\,dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} f[\Phi(x_i^k)]|Q_i^k| = \lim_{k\to+\infty} f[S_k]$$

dove

$$S_k = \sum_{i=1}^{N} \Phi(x_i^k)|Q_i^k| = \frac{1}{k^n}\sum_{i=1}^{N} \Phi(x_i^k) \in \mathcal{D}_K.$$

D'altro canto si ha $S_k \to \int \Phi(x)\,dx$ uniformemente su $K$ per $k \to +\infty$. Infatti

$$\begin{aligned}
&\left| S_k(y) - \int \Phi(x)(y)\,dx \right| \le \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i^k} \left| \Phi(x_i^k)(y) - \Phi(x)(y) \right| dx \\
&\le \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \left| \psi(z - x_i^k)\varphi(x_i^k - y) - \psi(z-x)\varphi(x-y) \right| dx \\
&\le \frac{C\|\varphi\|_1\|\psi\|_1}{k^n}.
\end{aligned}$$

Dunque $\int \Phi$ è una funzione continua. Inoltre osserviamo che si ha

$$D^\alpha S_k = \frac{1}{k^n}\sum_{i=1}^{N} D^\alpha \Phi(x_i^k)$$

da cui risulta che $\|D^\alpha S_k\|_0 \le |J| \|\Phi\|_{|\alpha|}$. Dunque le funzioni $S_k$ hanno tutte le derivate equilimitate. Visto che le derivate seconde sono equilimitate, le derivate prime oltre ad essere equilimitate sono anche equicontinue. A meno di sottosuccessioni si ha dunque che le derivate prime di $S_k$ convergono uniformemente a qualcosa che, necessariamente, è la corrispondente derivata della funzione $\int_J \Phi$. Ripetendo questo per ogni derivata successiva scopriamo che $D^\alpha S_k \to D^\alpha \int_J \Phi$ uniformemente su $K$. Dunque la convergenza è in $\mathcal{D}_K$ e dunque, per la continuità di $f$, possiamo finalmente concludere che

$$f[S_k] \to f\left[\int \Phi(x)\,dx\right] = f\left[y \mapsto \int \Phi(x)(y)\,dx\right].$$

Era quello che dovevamo dimostrare. □

**Teorema 58.** *Siano $f \in \mathcal{E}'$, $\varphi \in \mathcal{E}$ e $\psi \in \mathcal{D}$. Allora*

$$(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi) = (f * \psi) * \varphi.$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che i supporti di $(f * \varphi) * \psi$, $(f * \psi) * \varphi$, e $f * (\varphi * \psi) = f * (\psi * \varphi)$ sono tutti contenuti in $\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} \varphi + \operatorname{spt} \varphi$.

Dunque, se consideriamo una funzione $\varphi_c \in \mathcal{D}$ possiamo dire che se $z \notin \operatorname{spt} f + \operatorname{spt}(\varphi - \varphi_c) + \operatorname{spt} \psi$ si avrà

$$\begin{aligned}(f * ((\varphi - \varphi_c) * \psi))(z) &= ((f * (\varphi - \varphi_c)) * \psi)(z) \\ &= ((f * \psi) * (\varphi - \varphi_c))(z) = 0\end{aligned}$$

cioè, ricordando che il risultato di associatività è già stato dimostrato per $\varphi_c \in \mathcal{D}$, si potrà concludere:

$$((f * \varphi) * \psi)(z) = (f * (\varphi * \psi))(z) = ((f * \psi) * \varphi)(z)$$

La condizione $z \notin \operatorname{spt} f + \operatorname{spt}(\varphi_c - \varphi) + \operatorname{spt} \psi$ è equivalente a richiedere che $\varphi_c = \varphi$ su $K := z - \operatorname{spt} f - \operatorname{spt} \psi$ (si osservi infatti che in generale $z \notin A + B$ è equivalente a $A \subset \mathbb{R}^n \setminus (z - B)$). Visto che $f$ e $\psi$ hanno supporto compatto risulta che $K$ è compatto ed è quindi possibile trovare una $g \in \mathcal{D}$ che sia identicamente uguale ad 1 su $K$ cosicché $\varphi_c = g\varphi$ ha la proprietà richiesta. □

Abbiamo fin'ora dimostrato che è possibile fare il prodotto di convoluzione tra una distribuzione e due funzioni se almeno due dei tre attori hanno supporto compatto. E in tal caso vale la proprietà associativa.

**Teorema 59.** *Date $f, g \in \mathcal{D}'$ risultano equivalenti:*

1. $f = g$,
2. $f * \varphi = g * \varphi$ *per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}$,
3. $(f * \varphi)(0) = (g * \varphi)(0)$ *per ogni* $\varphi \in \mathcal{D}$.

*Dimostrazione.* E' ovvio che la prima implica la seconda e la seconda implica la terza. Per dimostrare che la terza implica la prima si osservi che

$$f[\varphi] = f[\tau_0 \check{\check{\varphi}}] = (f * \check{\varphi})(0).$$

□

**Teorema 60.** *Siano $f, g \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{E}$. Se almeno due dei tre attori hanno supporto compatto allora*

$$f * (g * \varphi) = g * (f * \varphi).$$

*Dimostrazione.* Data $\psi \in \mathcal{D}$ si ha, applicando i risultati precedenti (si osservi che non viene mai fatto il prodotto di convoluzione tra due distribuzioni):

$$\begin{aligned}(f * (g * \varphi)) * \psi &= (f * \psi) * (g * \varphi) = (g * \varphi) * (f * \psi) \\ &= g * ((f * \psi) * \varphi) = g * ((f * \varphi) * \psi) \\ &= (g * (f * \varphi)) * \psi.\end{aligned}$$

Tramite il Teorema 59 si ottiene il risultato voluto. □

Ci servirà il seguente teorema che assumiamo noto.

**Teorema 61** (grafico chiuso)**.** *[1, 2.15] Siano $X$ e $Y$ spazi di Frechét e sia $L\colon X \to Y$ lineare. Se il grafico $\Gamma_L = \{(x,y) \in X \times Y \colon y = Lx\}$ è chiuso in $X \times Y$ allora $L$ è continuo.*

**Teorema 62.** *Se $f \in \mathcal{D}'$ allora l'operatore $f*\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ definito da*

$$(f*)[\varphi] := f * \varphi, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

*risulta essere lineare e continuo. Inoltre già sappiamo che $f*$ commuta con le traslazioni: $\tau_x(f*\varphi) = f*(\tau_x\varphi)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Viceversa se $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ è un operatore lineare e continuo che commuta con le traslazioni $\tau_x \circ L = L \circ \tau_x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora esiste una unica distribuzione $f \in \mathcal{D}'$ tale che $L[\varphi] = f * \varphi$.*

*Dimostrazione.* Che $f*$ sia lineare è immediato. La continuità di $f*$ su $\mathcal{D}$ è equivalente alla continuità di $f*$ ristretto ad ogni $\mathcal{D}_K$ con $K$ compatto in $\mathbb{R}^n$. Visto che $\mathcal{D}_K$ è di Frechét possiamo applicare il teorema del grafico chiuso: è quindi sufficiente dimostrare che se $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{D}_K$ e se $f * \varphi_k \to \psi$ in $\mathcal{E}$ allora $\psi = f * \varphi$. Ma questo è immediato in quanto si ha

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lim_k (f*\varphi_k)(x) = \lim_k f[\tau_x \check{\varphi}_k] \\ &= f[\lim_k \tau_x \check{\varphi}_k] = f[\tau_x \check{\varphi}] = (f*\varphi)(x).\end{aligned}$$

Per il viceversa, sia $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ un operatore lineare e continuo. Osserviamo che se $f \in \mathcal{D}'$ allora

$$f[\varphi] = f[\tau_0\varphi] = (f*\check{\varphi})(0).$$

Dunque per dimostrare l'asserzione dovremo definire $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ tramite

$$f[\varphi] := L[\check{\varphi}](0).$$

La linearità di $f$ discende immediatamente dalla linearità di $L$. Ed anche la continuità:

$$f[\varphi_k] = L[\check{\varphi}_k](0) \to L[\check{\varphi}](0) = f[\varphi].$$

Verifichiamo che $f* = L$ sfruttando il fatto che $L$ commuta con le traslazioni:

$$\begin{aligned}(f*\varphi)(x) &= f[\tau_x\check{\varphi}] = L[(\tau_x\check{\varphi})\check{}\,] = L[\tau_{-x}\varphi](0) \\ &= (\tau_{-x}L[\varphi])(0) = L[\varphi](x).\end{aligned}$$

□

Possiamo quindi definire il prodotto di convoluzione tra due distribuzioni, se almeno una delle due ha supporto compatto. Siano $f \in \mathcal{D}'$ e $g \in \mathcal{E}'$. Poniamo, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, $f*g$

$$(f*g)[\varphi] := (g*f)[\varphi] := (g*(f*\check{\varphi}))(0).$$

Mettendo insieme i risultati precedenti possiamo quindi osservare che si ha

$$(g*(f*\check{\varphi}))(0) = g[(f*\check{\varphi})\check{}\,] = g[\check{f}*\varphi] = g[(\check{f}*)[\varphi]]$$

dunque risulta che $f * g = g * f = g \circ \check{f} *$. Essendo composizione di funzioni continue (e lineari) risulta quindi dimostrato che $f * g \in \mathcal{D}'$. Inoltre, per come lo abbiamo definito, vale la proprietà associativa, in quanto:

$$\begin{aligned}(f * g) * \varphi(x) &= (f * g)[\tau_x \check{\varphi}] = (g * (f * \tau_x \varphi))(0) \\ &= \tau_{-x}(g * (f * \varphi))(0) = (g * (f * \varphi))(x).\end{aligned}$$

E' anche facile verificare che $\operatorname{spt}(f * g) \subset \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g$. Prendiamo infatti una $\varphi \in \mathcal{D}$. Ci chiediamo sotto quali condizioni si ha $(f * g)[\varphi] = 0$. Ovvero

$$(f * g)[\varphi] = g * (f * \check{\varphi})(0) = 0.$$

Questo è vero se $0 \notin \operatorname{spt} g + \operatorname{spt} f - \operatorname{spt} \varphi$ e dunque è vero se $\operatorname{spt} \varphi$ è disgiunto da $\operatorname{spt} g + \operatorname{spt} f$.

**Teorema 63.** *Siano $f, g, h$ distribuzioni in $\mathcal{D}'$ e almeno due delle tre siano a supporto compatto. Allora*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

*(Ricordiamo che per definizione abbiamo $f * g = g * f$).*

*Dimostrazione.* Per il Teorema 59 sarà sufficiente dimostrare che facendo la convoluzione di entrambi i membri per una stessa funzione $\varphi \in \mathcal{D}$, si ottiene l'uguaglianza.

Sviluppiamo la definizione di $(f * g) * h$:

$$((f * g) * h) * \varphi = (f * g) * (h * \varphi) = f * (g * (h * \varphi)).$$

D'altro lato sviluppiamo la definizione di $f * (g * h)$:

$$(f * (g * h)) * \varphi = f * ((g * h) * \varphi) = f * (g * (h * \varphi)).$$

Avendo ottenuto lo stesso risultato, qualunque sia $\varphi \in \mathcal{D}$, il teorema è dimostrato. □

Il seguente teorema identifica nella distribuzione $\delta_0$ l'elemento neutro della convoluzione.

**Teorema 64.** *Per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$ ed ogni $f \in \mathcal{D}'$ si ha*

$$\delta_0 * \varphi = \varphi, \qquad \delta_0 * f = f.$$

*Dimostrazione.* Per la prima si ha semplicemente:

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta[\tau_x \check{\varphi}] = \check{\varphi}(0 - x) = \varphi(x).$$

Per la seconda, per ogni $\varphi \in D$ si ha

$$(\delta * f) * \varphi = \delta * (f * \varphi) = f * \varphi$$

da cui, per il Teorema 59 si ottiene il risultato voluto. □

**Teorema 65.** *Siano $f \in \mathcal{D}'$ e $\varphi \in \mathcal{D}$ oppure $f \in \mathcal{E}'$ e $\varphi \in \mathcal{E}$. Allora*

$$D^\alpha(f * \varphi) = (D^\alpha f) * \varphi = f * D^\alpha \varphi \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

*Dimostrazione.* Sia $e_j$ il $j$-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Valutiamo il limite del rapporto incrementale che definisce la derivata parziale $D_j(f * \varphi)$:

$$\begin{aligned}\frac{(f*\varphi)(x+he_j)-(f*\varphi)(x)}{h} &= \frac{(f*\tau_{-he_j}\varphi)(x)-(f*\varphi)(x)}{h} \\ &= \tau_x \check{f}\left[\frac{\tau_{-he_j}\varphi-\varphi}{h}\right].\end{aligned} \tag{7}$$

Osserviamo ora che per $h \to 0$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\frac{\tau_{-he_j}D^\alpha\varphi - D^\alpha\varphi}{h}(x) = \frac{D^\alpha\varphi(x+he_j)-D^\alpha\varphi(x)}{h} \to D_jD^\alpha\varphi(x).$$

Osserviamo allora che la convergenza è uniforme su ogni compatto $K$ in quanto $D^\alpha\varphi$ è derivabile con derivata limitata su $K$. Dunque

$$\frac{\tau_{-he_j}\varphi-\varphi}{h} \to D_j\varphi$$

in $\mathcal{D}$ (se $\varphi \in \mathcal{D}$) o in $\mathcal{E}$ (se $\varphi \in \mathcal{E}$). Per la continuità di $\tau_x\check{f}$ si ha dunque che il limite del rapporto incrementale (7) esiste e dunque $f * \varphi$ è derivabile nella direzione $e_j$ e si ha:

$$D_j(f*\varphi) = \tau_x\check{f}[D_j\varphi] = f * D_j\varphi.$$

Questo è vero per ogni direzione e, iterando, anche per le derivate successive. Dunque $f * \varphi \in \mathcal{E}$ e vale $D^\alpha(f*\varphi) = f * D^\alpha\varphi$.

Per quanto riguarda $(D^\alpha f) * \varphi$ si ha

$$\begin{aligned}(D_jf*\varphi)(x) &= D_jf[\tau_x\check{\varphi}] = -f[D_j\tau_x\check{\varphi}] \\ &= -f[\tau_xD_j\check{\varphi}] = f[\tau_x\check{D}_j\varphi] = (f*D_j\varphi)(x).\end{aligned}$$

□

**Teorema 66.** *Siano $f \in \mathcal{D}'$ e $g \in \mathcal{E}'$. Allora*

$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g = f*(D^\alpha g).$$

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che vale (caso particolare in cui $g = \delta$):

$$(D^\alpha f)*\varphi = f*D^\alpha\varphi = f*D^\alpha(\delta*\varphi) = f*D^\alpha\delta*\varphi$$

da cui

$$D^\alpha f = (D^\alpha\delta)*f.$$

Dunque, in generale,

$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha\delta)*f*g = (D^\alpha f)*g.$$

Si procede in modo analogo se $f$ e $g$ sono scambiati (non importa quale dei due ha supporto compatto). □

## 3.7 MOLLIFICATORI

Data una funzione $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ con supporto contenuto nella palla unitaria $B_1(0)$ e con integrale unitario: $\int \rho(x)\,dx = 1$ possiamo costruire le funzioni, chiamate *nuclei di convoluzione* o *mollificatori* per ogni $\varepsilon > 0$:

*nucleo di convoluzione*

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(1/\varepsilon).$$

La funzione $\rho_\varepsilon$ ha supporto in $B_\varepsilon(0)$ e ha sempre integrale unitario.

**Teorema 67.** *Siano $\rho_\varepsilon$ nuclei di convoluzione. Allora si ha per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$*

$$\varphi * \rho_\varepsilon \to \varphi \qquad \text{in } \mathcal{D}$$

*e per ogni $f \in \mathcal{D}'$*

$$f * \rho_\varepsilon \to f \qquad \text{in } \mathcal{D}'.$$

*Dimostrazione.* Si ha, per $\varepsilon \to 0^+$

$$\begin{aligned}
|(\varphi * \rho_\varepsilon)(x) - \varphi(x)| &= \left| \int_{B_\varepsilon} (\varphi(y) - \varphi(x))\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \right| \\
&\leq \int_{B_\varepsilon} \|\varphi\|_1 \varepsilon \rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \varepsilon\|\varphi\|_1 \to 0.
\end{aligned}$$

Dunque $\varphi * \rho_\varepsilon \to \varphi$ uniformemente. Inoltre essendo $D^\alpha(\rho * \rho_\varepsilon) = (D^\alpha \rho) * \rho_\varepsilon \to D^\alpha \rho$ anche le derivate convergono uniformemente e quindi si ha la convergenza nello spazio $\mathcal{D}$.

Per quanto riguarda le distribuzioni, si ha, per quanto visto in un teorema precedente

$$f * \rho_\varepsilon[\varphi] = f[\check{\rho}_\varepsilon * \varphi] \to f[\varphi]$$

in quanto abbiamo verificato che $\check{\rho}_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ in $\mathcal{D}$. □

In base ai teoremi precedenti possiamo affermare che ogni distribuzione $f \in \mathcal{D}$ è limite di distribuzioni associate a funzioni $\mathcal{E}$. Ovvero $\mathcal{E}$ è un sottospazio denso di $\mathcal{D}'$.

Ci servirà anche la densità di $\mathcal{D}$ in $L^p$, come dimostrato nel seguente.

**Teorema 68.** *Sia $p \in [1, +\infty)$. Se $\varphi \in L^p$ allora*

$$\varphi * \rho_\varepsilon \to \varphi \qquad \text{in } L^p$$

*per $\varepsilon \to 0^+$ dove $\rho_\varepsilon$ sono nuclei di convoluzione. Di conseguenza risulta che $\mathcal{D}$ è denso in $L^p$.*

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned}
|(\varphi * \rho_\varepsilon)(x) - \varphi(x)| &\leq \int |\varphi(y) - \varphi(x)|\rho_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= \int |\varphi(x - \varepsilon z) - \varphi(x)|\rho_\varepsilon(\varepsilon z)\varepsilon^n\,dz \\
&= \int |\varphi(x - \varepsilon z) - \varphi(x)|\rho(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Applicando ora la disuguaglianza di Jensen si ottiene:

$$|\varphi * \rho_\varepsilon(x) - \varphi(x)|^p \leq \int |\varphi(x-\varepsilon z) - \varphi(x)|^p \rho(z)\, dz$$

da cui

$$\begin{aligned}\|\varphi * \rho_\varepsilon - \varphi\|_{L^p}^p &\leq \iint |\varphi(x-\varepsilon z) - \varphi(x)|^p \rho(z)\, dx\, dz \\ &= \int \|\tau_{\varepsilon z}\varphi - \varphi\|_{L^p}^p \rho(z)\, dz.\end{aligned}$$

Per $\varepsilon \to 0^+$ è noto che $\tau_{\varepsilon z}\varphi \to \varphi$ in $L^p$. Dunque la funzione integranda tende a zero ed è dominata da $2\|\varphi\|_{L^1}\rho(z)$. Di conseguenza l'integrale tende a zero per $\varepsilon \to 0^+$. Significa che $\|\varphi * \rho_\varepsilon - \varphi\|_{L^p}^p \to 0$, come volevamo dimostrare.

Se ora $\varphi \in L^p$ ha supporto compatto, si trova che $\varphi * \rho_\varepsilon$ sono funzioni in $\mathcal{D}$ che convergono in $L^p$ a $\varphi$. D'altra parte, se $\varphi$ non ha supporto compatto può comunque essere approssimata in $L^p$ per $R \to +\infty$ dalle funzioni a supporto compatto $\varphi \cdot \chi_{B_R}$ dove $\chi_{B_R}$ è la funzione caratteristica della palla di raggio $R$ centrata nell'origine. Questo dimostra che $\mathcal{D}$ è denso in $L^p$. □

Il seguente è una formulazione in termini distribuzionali del cosiddetto *Teorema fondamentale del calcolo delle variazioni*. Garantisce che la mappa $L^1_{loc} \to \mathcal{D}$ che associa ad una funzione la distribuzione ad essa associata, è iniettiva.

**Teorema 69.** *Se $\varphi \in L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$. Se $\varphi = 0$ come distribuzione allora $\varphi = 0$ quasi ovunque.*

*Dimostrazione.* Per ogni $k \in \mathbb{N}$ consideriamo l'insieme

$$E_k^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leq k, \pm\varphi(x) \geq 1/k\}.$$

Ogni $E_k^\pm$ è limitato per definizione e si ha

$$\bigcup_k E_k^+ \cup E_k^- = \{\varphi \neq 0\}.$$

Fissiamo $E = E_k^+$ e sia $\chi_E \in L^1$ la funzione caratteristica di tale insieme.

Applicando il teorema di Fubini-Tonelli possiamo verificare che vale

$$\int \varphi \cdot (\chi_E * \rho_\varepsilon) = \int\int \varphi(x) \cdot \chi_E(y)\rho_\varepsilon(x-y)\, dx\, dy = \int \chi_E \cdot (\varphi * \rho_\varepsilon)$$

Ma il lato sinistro è nullo in quanto $\psi = \chi_E * \rho_\varepsilon \in \mathcal{D}$ e per ipotesi $\int \varphi\psi = \varphi[\psi] = 0$. Per il teorema precedente sappiamo invece che $\chi_E * \rho_\varepsilon \to \chi_E$ in $L^1$. Dunque, per quanto riguarda il lato destro si trova:

$$\int \chi_E \cdot (\varphi * \rho_\varepsilon) = \int_E \varphi * \rho_\varepsilon \to \int_E \varphi \geq |E|/k.$$

Significa che $E = E_k^+$ ha misura nulla. Lo stesso può dirsi per $E_k^-$ e dunque l'unione di tutti questi insiemi ha ancora misura nulla. Che è quello che dovevamo dimostrare. □

# 4 TRASFORMATA DI FOURIER

La *trasformata di Fourier* di una funzione $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è la funzione $\mathcal{F}[\varphi]$ definita su $\mathbb{R}^n$ da $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}[\varphi](t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i(t,x)}\, dx, \qquad t \in \mathbb{R}^n$$

dove $(x,t) := x_1 t_1 + \cdots + x_n t_n$ è l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$.

**Teorema 70.** *Siano* $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Sia* $\exp_{ix}(t) := e^{i(t,x)}$, $\tau_x f(y) := f(y-x)$, $h_\lambda f(x) := f(x/\lambda)$. *Allora*

1. $\mathcal{F}[\tau_x \varphi] = \exp_{-ix} \cdot \mathcal{F}[\varphi]$;
2. $\mathcal{F}[\exp_{ix} \cdot \varphi] = \tau_x \mathcal{F}[\varphi]$;
3. *se* $\varphi * \psi \in L^2$ *allora* $\mathcal{F}[\varphi * \psi] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi]$;
4. $\mathcal{F}[h_\lambda \varphi] = \lambda^n h_{1/\lambda} \mathcal{F}[\varphi]$ *per* $\lambda > 0$;
5. $\mathcal{F}[\check{\varphi}] = \check{\mathcal{F}}[\varphi]$.

*Dimostrazione.*

1. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\tau_x \varphi](t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(y-x) e^{-i(y,t)}\, dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(z) e^{-i(x+z,t)}\, dy = e^{-i(x,t)} \mathcal{F}[\varphi](t).\end{aligned}$$

2. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\exp_{ix} \cdot \varphi](t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(y) e^{i(x,y)} e^{-i(t,y)}\, dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(y) e^{-i(t-x,y)}\, dy = \mathcal{F}[\varphi](t-x).\end{aligned}$$

3. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\varphi * \psi](t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \int \varphi(y) \psi(x-y)\, dy \cdot e^{-i(t,x)}\, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \int \varphi(y) \psi(x-y) e^{-i(t,x-y)} e^{-i(t,y)}\, dx\, dy \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[\varphi](t) \cdot \mathcal{F}[\psi](t).\end{aligned}$$

4. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[h_\lambda \varphi](t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(x/\lambda) e^{-i(t,x)}\, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(y) e^{-i(t,\lambda y)}\, \lambda^n dy = \lambda^n \mathcal{F}[\varphi](\lambda t)\end{aligned}$$

5. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\check{\varphi}](t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(-x) e^{-i(t,x)}\, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(x) e^{-i(t,-x)}\, dx = \mathcal{F}[\varphi](-t) = \check{\mathcal{F}}[\varphi](t).\end{aligned}$$

□

## 4.1 FUNZIONI A DECRESCENZA RAPIDA

Presi $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ poniamo

$$q_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right|$$

definiamo lo *spazio di Schwartz* delle funzioni a decrescenza rapida come $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{E} \colon q_{\alpha,\beta}(\varphi) < +\infty \text{ per ogni } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

In buona sostanza queste sono le funzioni che all'infinito tendono a zero, con tutte le derivate, più velocemente di qualunque polinomio.

E' chiaro che se $\varphi \in \mathcal{S}$ anche $x^\alpha D^\beta \varphi \in \mathcal{S}$ per ogni multi-indice $\alpha$ e $\beta$.

Su $\mathcal{S}$ ogni $q_{\alpha,\beta}$ risulta essere una seminorma. E' chiaro inoltre che $q_{0,0}$ separa i punti, dunque possiamo considerare su $\mathcal{S}$ la topologia localmente convessa generata da tale famiglia di seminorme.

Chiaramente $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.

Osserviamo anche che $\mathcal{S} \subset L^1$ e che la convergenza in $\mathcal{S}$ è più forte della convergenza in $L^1$. Infatti

$$\begin{aligned} \int |\varphi(x)|\, dx &\le \int \frac{(1+x^2)^n |\varphi(x)|}{(1+x^2)^n}\, dx \\ &\le c \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+x^2)^n \varphi(x)\right| \le \sum_{|\alpha|\le 2n} q_{\alpha,0}(\varphi). \end{aligned}$$

**Teorema 71.** *$\mathcal{S}$ è uno spazio di Frechét.*

*Dimostrazione.* Sia $\varphi_k$ una successione di Cauchy in $\mathcal{S}$. Allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ sappiamo che $x^\alpha D^\beta \varphi_k$ è di Cauchy rispetto alla convergenza uniforme, dunque tale successione converge uniformemente ad una funzione continua $\psi_{\alpha,\beta}$. Posto $\varphi = \psi_{0,0}$ è facile osservare che necessariamente si deve avere $\psi_{\alpha,\beta} = x^\alpha D^\beta \varphi$. Dunque $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{S}$. Risulta quindi che $\mathcal{S}$ è completo. Inoltre esso è metrizzabile in quanto la topologia è generata da una famiglia numerabile di seminorme (Teorema 19).

$\square$

**Teorema 72.** *Se $\psi \in \mathcal{S}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ognuna delle mappe $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$*

$$\varphi \mapsto x^\alpha \cdot \varphi, \qquad \varphi \mapsto \psi \cdot \varphi, \qquad \varphi \mapsto D^\alpha \varphi$$

*è continua.*

*Dimostrazione.* E' sufficiente osservare che le seminorme $q_{\alpha,\beta}$ delle funzioni $x^\alpha \varphi$, $\psi \cdot \varphi$ e $D^\alpha \varphi$ si stimano con somme finite delle seminorme $q_{\alpha,\beta}$ di $\varphi$. $\square$

**Teorema 73.** *Se $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, allora*

$$\mathcal{F}[D^\alpha \varphi] = (it)^\alpha \mathcal{F}[\varphi], \qquad \mathcal{F}[x^\alpha \varphi] = (iD)^\alpha \mathcal{F}[\varphi].$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\mathcal{F}[D_j \varphi](t) = \int D_j \varphi(x) e^{-i(t,x)}\, dx.$$

Visto che la funzione integranda ha decrescita rapida all'infinito (la funzione esponenziale sull'asse immaginario è limitata) possiamo fare una integrazione per parti in cui il termine di bordo risulterà nullo. Per convincerci di questo consideriamo l'integrale ristretto alla palla $B_R := B_R(0)$:

$$\int_{B_R} D_j\varphi(x)e^{-i(t,x)}\,dx = \int_{\partial B_R} \varphi(x)e^{-i(t,x)}\nu_j(x)d\sigma(x) - \int_{B_R} \varphi(x)D_je^{-i(t,x)}\,dx.$$

Il termine di bordo tende a zero per $R \to +\infty$ in quanto tale termine si stima con $cR^{N-1}\sup_{x\in\partial B_R}|\varphi(x)|$ e $f$ tende a zero più velocemente di qualunque potenza di $x$.

Dunque si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[D_j\varphi](t) &= -\int \varphi(x)D_je^{-i(t,x)}\,dx\\ &= it_j\int \varphi(x)e^{-i(t,x)}\,dx = it_j\mathcal{F}[f](t).\end{aligned}$$

Applicando iterativamente questa formula alle derivate successive, si ottiene il risultato desiderato.

Viceversa, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x_j\varphi](t) &= \int x_j\varphi(x)e^{-i(t,x)}\,dx\\ &= i\int \varphi(x)\frac{\partial}{\partial t_j}e^{-i(t,x)}\,dx\\ &= i\frac{\partial}{\partial t_j}\int \varphi(x)e^{-i(t,x)}\,dx\\ &= iD_j\mathcal{F}[\varphi](t).\end{aligned}$$

Lo scambio della derivata con l'integrale è giustificata dal teorema di convergenza dominata, visto che le derivate della funzione integranda sono a decrescenza rapida e quindi sono sommabili.

Iterando con le derivate successive si ottiene il risultato voluto. □

**Teorema 74.** *Se $\varphi \in \mathcal{S}$ allora $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$. Inoltre $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è lineare e continuo.*

*Dimostrazione.* Si ha

$$\left|t^\alpha D^\beta\mathcal{F}[\varphi](t)\right| = \left|\mathcal{F}[D^\alpha(x^\beta\varphi(x]))(t)\right| \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left\|D^\alpha(x^\beta\varphi(x))\right\|_{L^1}.$$

Dunque se $\varphi \in \mathcal{S}$ sapendo che anche $D^\alpha x^\beta\varphi(x)$ sta in $\mathcal{S}$ e sapendo che la norma $L^1$ risulta quindi essere limitata, si ottiene che $q_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}[\varphi])$ è limitata. Dunque $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$.

Inoltre se $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$ allora la norma $L^1$ di $D^\alpha x^\beta\varphi(x)$ tende a zero e quindi anche ogni seminorma $q_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}[\varphi_k]) \to 0$. Dunque $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è continuo. □

Consideriamo lo spazio delle funzioni continue che si annullano all'infinito: $C_0$

$$C_0 := \{\varphi \in C(\mathbb{R}^n) \colon \lim_{|x|\to+\infty} \varphi(x) = 0\}.$$

E' semplice osservare che $C_0$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $C$ con la topologia indotta dalla convergenza uniforme. Inoltre $C_0$ può essere visto come la chiusura di $\mathcal{S}$ in $L^\infty$. Possiamo infatti pensare di compattificare $\mathbb{R}^n$ con un punto all'infinito. Le funzioni in $C_0$ sono esattamente quelle che possono essere estese a zero con continuità nel punto all'infinito. La convergenza uniforme garantisce la continuità del limite e quindi l'annullarsi all'infinito.

Ci servirà nel seguito il seguente risultato

**Teorema 75.** *Se $\varphi \in L^1$ allora $\mathcal{F}[\varphi] \in C_0$. Inoltre $\mathcal{F} \colon L^1 \to C_0$ è lineare e continua.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già osservato che

$$\|\mathcal{F}[\varphi]\|_{L^\infty} \le (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^1}. \tag{8}$$

Dunque $\mathcal{F} \colon L^1 \to L^\infty$ è continua. Per il Teorema 68 sappiamo che $\mathcal{S}$ è denso in $L^1$. Dunque

$$\mathcal{F}[L^1] = \mathcal{F}[\overline{\mathcal{S}}^{L^1}] \subset \overline{\mathcal{F}[\mathcal{S}]}^{L^\infty}.$$

Visto che $\mathcal{F}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{S}$ e che $\overline{\mathcal{S}}^{L^\infty} = C_0$ si ottiene il risultato voluto. □

**Teorema 76.** *Sia $g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Allora $g \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{F}[g] = g$.*

*Dimostrazione.* Nel caso $n = 1$, cioè per $x \in \mathbb{R}$ osserviamo che la funzione $u(x) = e^{-x^2/2}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$u' = -xu.$$

Dunque, facendo la trasformata di Fourier $v = \mathcal{F}[u]$ si ottiene

$$ixv = -iv'$$

cioè anche $v$ soddisfa la stessa equazione. Allora osserviamo che si ha

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - vu'}{u^2} = \frac{-xvu - vxu}{u^2} = 0.$$

Dunque $v = cu$ per qualche costante $c \in \mathbb{R}$. Per determinare $c$ calcoliamo $v(0)$:

$$v(0) = \mathcal{F}[u](0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-x^2/2}\, dx = 1 = u(0).$$

Dunque $u = v$, cioè $\mathcal{F}[u] = u$.

In $\mathbb{R}^n$ si osserva che

$$g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} = e^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{2}} = u(x_1)\cdots u(x_n)$$

e analogamente

$$e^{-i(t,x)} = e^{-i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)} = e^{-it_1x_1}\cdots e^{-it_nx_n}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](t) &= \int u(x_1)e^{-it_1x_1}\cdots u(x_n)e^{-it_nx_n}\, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \mathcal{F}[u](t_1)\cdots\mathcal{F}[u](t_n) = u(t_1)\cdots u(t_n) = g(t).\end{aligned}$$

□

**Teorema 77.** *Se $\varphi, \psi \in L^1$ si ha*

$$\int \mathcal{F}[\varphi] \cdot \psi = \int \varphi \cdot \mathcal{F}[\psi].$$

*Dimostrazione.* E' una immediata conseguenza del teorema di Fubini. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\int \mathcal{F}[\varphi] \cdot \psi &= \int \left( (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(y) e^{-i(x,y)}\, dy \right) \psi(x)\, dx \\ &= \int \varphi(y) \left( (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \psi(x) e^{-i(x,y)}\, dx \right) dy = \int \varphi \cdot \mathcal{F}[\psi].\end{aligned}$$

□

**Teorema 78** (teorema di inversione)**.** *Se $\psi \in \mathcal{S}$ allora $\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]] = \check{\psi}$. Ovvero l'operatore $\check{\mathcal{F}}$ è l'inverso di $\mathcal{F}$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la funzione $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$ e le sue dilatate $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x/\lambda)$. Si avrà allora

$$\mathcal{F}[\varphi_\lambda](x) = \lambda^n \mathcal{F}[\varphi](\lambda x) = \lambda^n \varphi(\lambda x).$$

Dal teorema precedente si ha

$$\int \mathcal{F}[\varphi_\lambda] \cdot \psi = \int \varphi_\lambda \cdot \mathcal{F}[\psi]. \tag{9}$$

Per il lato sinistro si ha

$$\int \mathcal{F}[\varphi_\lambda] \cdot \psi = \int \lambda^n \varphi(\lambda x) \psi(x)\, dx = \int \varphi(z) \psi(z/\lambda)\, dz.$$

Per $\lambda \to \infty$ la funzione integranda tende puntualmente a $\psi(0)\varphi(z)$. Inoltre la convergenza è dominata da $2\varphi(z)\|\psi\|_{L^\infty}$, dunque si può passare al limite per ottenere, per $\lambda \to +\infty$

$$\int \mathcal{F}[\varphi_\lambda] \cdot \psi \to \psi(0) \int \varphi(z)\, dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \psi(0).$$

Per quanto riguarda il lato destro di (9) si ha

$$\int \varphi_\lambda \cdot \mathcal{F}[\psi] = \int \varphi(y/\lambda) \mathcal{F}[\psi](y)\, dy$$

la funzione integranda tende puntualmente a $\varphi(0)\mathcal{F}[\psi]$ e la convergenza è dominata dalla stessa funzione $\varphi(0)|\mathcal{F}[\psi]|$ che è sommabile in quanto essendo $\psi \in \mathcal{S}$ abbiamo anche $\mathcal{F}[\psi] \in \mathcal{S} \subset L^1$. Dunque passando al limite per $\lambda \to +\infty$ si ottiene:

$$\int \varphi_\lambda \mathcal{F}[\psi] \to \int \mathcal{F}[\psi](y)\, dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]](0).$$

Dunque abbiamo mostrato che

$$\psi(0) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]](0).$$

Per concludere basta osservare che

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]](x) &= (\tau_{-x}\mathcal{F}[\mathcal{F}[\psi]])(0) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\tau_x \psi]](0) \\ &= (\tau_x \psi)(0) = \psi(-x) = \check{\psi}(x).\end{aligned}$$

□

**Teorema 79.** *Se $\varphi \in L^1$ e $\mathcal{F}[\varphi] \in L^1$ allora*

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[\varphi]] = \check{\varphi} \qquad \textit{quasi ovunque.}$$

*Dimostrazione.* Data qualunque $\psi \in \mathcal{S}$ si ha

$$\begin{aligned}\int \check{\varphi} \cdot \psi &= \int \check{\varphi} \cdot \mathcal{F}\mathcal{F}\check{\psi} = \int (\mathcal{F}\check{\varphi}) \cdot (\mathcal{F}\check{\psi}) \\ &= \int (\mathcal{F}\mathcal{F}\check{\varphi}) \cdot \check{\psi} = \int (\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi) \cdot \psi.\end{aligned}$$

Questo significa che $\check{\varphi} = \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi$ (le due funzioni coincidono come distribuzioni) e per il Teorema 69 le funzioni stesse coincidono quasi ovunque. □

**Teorema 80.** *Se $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ allora $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$ e*

$$\mathcal{F}[\varphi\psi] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \mathcal{F}[\varphi] * \mathcal{F}[\psi].$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che (Teorema 70) $\mathcal{F}[\varphi * \psi] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi]$ e visto che $\mathcal{F}[\varphi], \mathcal{F}[\psi] \in \mathcal{S}$ (Teorema 74) anche il loro prodotto è in $\mathcal{S}$, dunque, sapendo che $\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è invertibile,

$$\varphi * \psi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\check{\mathcal{F}}[\mathcal{F}[\varphi] \cdot \mathcal{F}[\psi]] \in \mathcal{S}.$$

inoltre

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi &= \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\check{\mathcal{F}}[(\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi) \cdot (\mathcal{F}\mathcal{F}\psi)] \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\check{\mathcal{F}}[\check{\varphi} \cdot \check{\psi}] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}[\varphi \cdot \psi].\end{aligned}$$

□

**Teorema 81.** *Siano $X$ e $Y$ spazi metrici, $A$ un denso in $X$ e $f \colon A \subset X \to Y$ una funzione uniformemente continua. Allora esiste una unica estensione $\tilde{f} \colon X \to Y$ continua su tutto $X$ che coincide con $f$ su $A$. Se inoltre $f$ è una isometria, anche $\tilde{f}$ lo è.*

**Teorema 82** (Plancherel). *$\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ si estende in modo unico ad una isometria $\tilde{\mathcal{F}} \colon L^2 \to L^2$:*

$$\int \tilde{\mathcal{F}}[\varphi] \cdot \tilde{\mathcal{F}}[\psi] = \int \varphi \cdot \psi \qquad \forall \varphi \in L^2.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha

$$\mathcal{F}[\bar{\varphi}] = \overline{\check{\mathcal{F}[\varphi]}} = \overline{\mathcal{F}[\check{\varphi}]}$$

Dunque, date $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ si ha (formula di Parseval):

$$\int \varphi \cdot \bar{\psi} = \int \varphi \cdot \mathcal{F}[\mathcal{F}\check{\bar{\psi}}] = \int \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\check{\bar{\psi}} = \int \mathcal{F}\varphi \cdot \overline{\mathcal{F}\psi}.$$

Questo significa che $\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \subset L^2 \to L^2$ è una isometria rispetto alla metrica di $L^2$. Sappiamo che $\mathcal{S}$ è denso in $L^2$, dunque esiste una unica estensione di $\mathcal{F}$ a tutto $L^2$:

$$\tilde{\mathcal{F}} \colon L^2 \to L^2.$$

Vogliamo ora mostrare che $\tilde{F}$ coincide con $\mathcal{F}$ su $L^1 \cap L^2$. Data $\varphi \in L^1 \cap L^2$ sappiamo che $\varphi_\varepsilon = \varphi * \rho_\varepsilon \to \varphi$ sia in $L^2$ che in $L^1$. Ma $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{S}$ dunque $\tilde{\mathcal{F}}[\psi_\varepsilon] = \mathcal{F}[\psi_\varepsilon]$. Da un lato $\tilde{\mathcal{F}}[\varphi_\varepsilon] \to \tilde{\mathcal{F}}[\varphi]$ in $L^2$, in quanto $\tilde{\mathcal{F}}$ è una isometria e quindi è continua su $L^2$. Dall'altro $\mathcal{F}[\varphi_\varepsilon] \to \mathcal{F}[\psi]$ in $L^\infty$ in quanto abbiamo già osservato che $\mathcal{F}\colon L^1 \to C_0$ è continua. Ma allora necessariamente i due limiti coincidono quasi ovunque. □

## 4.2 DISTRIBUZIONI TEMPERATE

**Teorema 83.** *$\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$ e l'inclusione $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$ è continua.*

*Dimostrazione.* Sia $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi = 1$ sulla palla $B_1$. Data qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$ consideriamo le funzioni

$$\varphi_r(x) := \varphi(x)\psi(x/r).$$

Chiaramente $\varphi_r \in \mathcal{D}$, vogliamo mostrare che $\varphi_r \to \varphi$ in $\mathcal{S}$ per $r \to +\infty$.

Chiaramente $\varphi(x) = \varphi_r(x)$ se $|x| \leq r$. Se invece $|x| \geq r$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ si ha

$$\begin{aligned} \left| x^\alpha D^\beta(\varphi - \varphi_r)(x) \right| &= \left| x^\alpha D^\beta(\varphi(x) \cdot (1 - \psi(x/r))) \right| \\ &= \left| x^\alpha \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^{\beta-\gamma}\varphi(x) r^{-|\gamma|} D^\gamma(1-\psi)(x/r) \right| \end{aligned}$$

Essendo $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha che $x^\alpha D^{\beta-\gamma}\varphi \in C_0$ mentre $r^{-|\gamma|}D^\gamma(1-\psi) \leq \|D^\gamma(1-\psi)\|_0$ è limitata. Quindi, per $r \to +\infty$,

$$\sup_{|x| \geq r} x^\alpha D^{\beta-\gamma}\varphi(x) \to 0.$$

Dunque si ottiene la convergenza a zero di $q_{\alpha,\beta}(\varphi - \varphi_r)$ e di conseguenza $\varphi_r \to \varphi$ in $\mathcal{S}$. E' quindi dimostrato che $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$.

Per dimostrare che l'inclusione $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$ è continua è sufficiente osservare che su $\mathcal{D}_K$ le topologie di $\mathcal{D}$ e di $\mathcal{S}$ coincidono entrambe con la topologia della convergenza uniforme di tutte le derivate. Infatti su un compatto $K$ il termine $x^\alpha$ è limitato e non dà quindi alcun contributo. □

Un funzionale $f \in \mathcal{S}'$ viene chiamato *distribuzione temperata*. Visto che $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ e visto che $\mathcal{D}$ si immerge con continuità in $\mathcal{S}$, risulta che la restrizione di $f$ a $\mathcal{D}$ è un funzionale lineare e continuo. Inoltre, la restrizione di $f$ a $\mathcal{D}$ determina univocamente $f$, in quanto $\mathcal{D}$ è denso in $\mathcal{S}$. In questo senso possiamo affermare che $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ (così come abbiamo considerato $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$). $\mathcal{S}'$

**Teorema 84.** *Le distribuzioni a supporto compatto sono temperate: $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$.*

*Dimostrazione.* E' una semplice conseguenza del fatto che la topologia di $\mathcal{S}$ è più forte della topologia di $\mathcal{E}$ (ristretta ad $\mathcal{S}$) in quanto richiede in particolare la convergenza uniforme di tutte le derivate (mentre in $\mathcal{E}$

è sufficiente la convergenza uniforme su ogni compatto). Dunque un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{E}$ si può restringere ad $\mathcal{S}$ e risulterà ancora essere un funzionale lineare e continuo. $\square$

**Teorema 85.** *Sia $\mu$ una misura positiva di Borel tale che*

$$\int (1+|x|^2)^{-N} d\mu(x) < +\infty$$

*per qualche $N \in \mathbb{N}$. Allora $\mu \in \mathcal{S}'$.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo mostrare che $\mu$, definito su $\mathcal{D}$ da

$$\mu[\varphi] = \int \varphi(x)\, d\mu(x)$$

è continuo su $\mathcal{D}$ rispetto alla topologia di $\mathcal{S}$. E' sufficiente osservare che

$$\begin{aligned} |\mu[\varphi]| &\leq \int (1+|x|^2)^N \varphi(x)\, (1+|x|^2)^{-N}\, d\mu(x) \\ &\leq C \max_{|\alpha|\leq 2N} q_{\alpha,0}(\varphi) \int (1+|x|^2)^{-N}\, d\mu(x). \end{aligned}$$

Dunque se $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{S}$ anche $\mu[\varphi_k] \to 0$. $\square$

**Teorema 86.** *Se $f \in L^p$ con $p \in [1, +\infty]$. Allora $f \in \mathcal{S}'$.*

*Dimostrazione.* Si ha, applicando la disuguaglianza di Hölder con $q$ esponente coniugato a $p$:

$$|f[\varphi]| = \|f \cdot \varphi\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}.$$

Notiamo ora che

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^q}^q = \int |\varphi(x)|^q\, dx &\leq \int \frac{(1+x^2)^{qn} |\varphi(x)|^q}{(1+x^2)^n} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha|\leq 2n} q_{\alpha,0}(\varphi) \right)^q \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\|\varphi\|_{L^q} \leq C \sum_{|\alpha|\leq 2n} q_{\alpha,0}(\varphi).$$

Risulta quindi che l'operatore $f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ è limitato dunque continuo e di conseguenza $f \in \mathcal{S}'$. $\square$

**Teorema 87.** *Se $f(x) = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{N}^n$ allora $f \in \mathcal{S}'$.*

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned} |f[\varphi]| &\leq \int |x^\alpha| \varphi(x)\, dx \leq \frac{\left|(1+x^2)^n x_\alpha \varphi(x)\right|}{(1+x^2)^n}\, dx \\ &\leq C \sum_{|\beta|\leq|\alpha|+2n} q_{\beta,0}(\varphi). \end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 88.** *Se $f \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\psi \in \mathcal{S}$, allora*

$$D^\alpha f, \qquad x^\alpha \cdot f, \qquad \psi \cdot f$$

*sono in $\mathcal{S}'$ (distribuzioni temperate).*

*Dimostrazione.* Sappiamo che $D^\alpha f$, $x^\alpha \cdot f$ e $g \cdot f$ sono distribuzioni e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ vale

$$D^\alpha f[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} f[D^\alpha \varphi], \qquad x^\alpha f[\varphi] = f[x^\alpha \varphi], \qquad \psi f[\varphi] = f[\psi\varphi].$$

Per le proprietà delle funzioni a crescita lenta, Teorema 72, le mappe che mandano $\varphi \in \mathcal{S}$ in $D^\alpha \varphi$, $x^\alpha \varphi$ e $\psi\varphi$ sono operatori da $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Risulta quindi che i funzionali $D^\alpha f$, $x^\alpha \cdot f$ e $\psi f$ sono continui da $\mathcal{S} \to \mathbb{C}$. □

## 4.3 TRASFORMATA DI FOURIER DI DISTRIBUZIONI TEMPERATE

Data $f \in \mathcal{S}'$ definiamo la sua trasformata di Fourier tramite la seguente formula $\mathcal{F}f$

$$\mathcal{F}f[\varphi] = f[\mathcal{F}\varphi].$$

Visto che $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è continuo, risulta che $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'$. La definizione appena data estende l'usuale trasformata di Fourier per quelle distribuzioni che si rappresentano con funzioni $f \in L^1$. Infatti per la formula di Parceval si ha

$$\mathcal{F}f[\varphi] = f[\mathcal{F}\varphi] = \int f \cdot \mathcal{F}\varphi = \int \mathcal{F}f \cdot \varphi = (\mathcal{F}f)[\varphi].$$

Lo stesso vale per la trasformata di Fourier-Plancherel di funzioni $f \in L^2$, infatti anche in quel caso vale la formula di Parceval e si può ripetere la dimostrazione fatta per le $f \in L^1$.

**Teorema 89.** *$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ è un operatore lineare continuo, bigettivo.*

*Dimostrazione.* E' chiaro che $\mathcal{F}$ è lineare e bigettivo, in quanto

$$\mathcal{F}\mathcal{F}f[\varphi] = f[\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi] = f[\check{\varphi}] = \check{f}[\varphi]$$

e quindi $\mathcal{F}\mathcal{F}f = \check{f}$. Dunque $\mathcal{F}$ è iniettivo e surgettivo e $\mathcal{F}^{-1} = \check{\mathcal{F}}$.

Verifichiamo che $\mathcal{F}$ è continuo in 0. Ricordiamo che su $\mathcal{S}$ c'è la topologia generata dalle seminorme $q_{\alpha,\beta}$ e quindi su $\mathcal{S}'$ c'è la topologia generata dalle seminorme $|\lambda_\varphi|$ dove $|\lambda_\varphi|(f) = |f[\varphi]|$ al variare di $\varphi \in \mathcal{S}$.

Dunque se $W$ è un intorno di 0 in $\mathcal{S}'$ esso dovrà contenere una intersezione finita di palle di seminorme $|\lambda_\varphi|$. Ovvero esisteranno $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ tali che

$$W \supset \{f \in \mathcal{S}' \colon |f[\varphi_k]| < 1, k = 1, \dots, m\}.$$

Scegliamo

$$V := \{f \in \mathcal{S}' \colon |f[\mathcal{F}\varphi_k]| < 1, k = 1, \dots, m\}.$$

chiaramente anche $V$ è un intorno di 0 in $\mathcal{S}'$ e visto che $\mathcal{F}f[\varphi_k] = f[\mathcal{F}\varphi_k]$ è chiaro che $\mathcal{F}[V] \subset W$. □

**Teorema 90.** *La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'$ soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $$\mathcal{F}(D^\alpha f) = (it)^\alpha \mathcal{F} f, \qquad \mathcal{F}(x^\alpha f) = (-iD)^\alpha \mathcal{F} f;$$

2. $$\mathcal{F}\tau_x f = \exp_{-ix} \cdot \mathcal{F} f, \qquad \mathcal{F}(\exp_{ix} \cdot f) = \tau_x \mathcal{F} f, \qquad \mathcal{F}\check{f} = \check{\mathcal{F}} f.$$

*Dimostrazione.* 1. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[D^\alpha f][\varphi] &= D^\alpha f[\mathcal{F}\varphi] = (-1)^{|\alpha|} f[D^\alpha \mathcal{F}\varphi] = i^{|\alpha|} f[\mathcal{F} x^\alpha \varphi] \\ &= i^{|\alpha|} \mathcal{F} f[x^\alpha \varphi] = (ix)^\alpha \mathcal{F} f[\varphi].\end{aligned}$$

e, viceversa:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x^\alpha f][\varphi] &= x^\alpha f[\mathcal{F}\varphi] = f[x^\alpha \mathcal{F}\varphi] = (-i)^{|\alpha|} f[\mathcal{F} D^\alpha \varphi] \\ &= (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F} f[D^\alpha \varphi] = (iD)^\alpha \mathcal{F} f[\varphi].\end{aligned}$$

2. Dalle corrispondenti proprietà sulle funzioni test:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\tau_x f)[\varphi] &= (\tau_x f)[\mathcal{F}\varphi] = f[\tau_{-x}\mathcal{F}\varphi] = f[\mathcal{F}[\exp_{-ix} \cdot \varphi]] \\ &= (\mathcal{F} f)[\exp_{-ix} \cdot \varphi] = (\exp_{-ix} \cdot \mathcal{F} f)[\varphi];\end{aligned}$$

viceversa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\exp_{ix} \cdot f][\varphi] &= (\exp_{ix} \cdot f)[\mathcal{F}\varphi] = f[\exp_{ix} \cdot \mathcal{F}\varphi] = f[\mathcal{F}\tau_{-x}\varphi] \\ &= (\mathcal{F} f)[\tau_{-x}\varphi] = (\tau_x \mathcal{F} f)[\varphi]\end{aligned}$$

e infine

$$(\mathcal{F}\check{f})[\varphi] = \check{f}[\mathcal{F}\varphi] = f[\mathcal{F}\check{\varphi}] = (\mathcal{F} f)[\check{\varphi}] = (\check{\mathcal{F}} f)[\varphi].$$

□

Proviamo, ad esempio, a calcolare $\mathcal{F}\delta_0$. Si ha $\mathcal{F}\delta_0$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\delta_0)[\varphi] &= \delta_0[\mathcal{F}\varphi] = (\mathcal{F}\varphi)(0) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(x)\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}[\varphi].\end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ (ovvero la distribuzione associata alla costante $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$). Visto che $\check{\mathcal{F}}\mathcal{F} f = \check{f}$ troviamo anche $\mathcal{F}[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \check{\delta}_0 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta_0$. $\mathcal{F}1$

Inoltre troviamo che $\mathcal{F}\delta_x$

$$\mathcal{F}[\delta_x] = \mathcal{F}[\tau_x \delta_0] = \exp_{-ix} \mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp_{-ix}.$$

Viceversa $\mathcal{F}\exp_{ix}$

$$\mathcal{F}[\exp_{ix}] = \mathcal{F}[\exp_{ix} \cdot 1] = \tau_x \mathcal{F}1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \tau_x \delta_0 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta_x.$$

**Lemma 91.** *Sia $\varphi \in \mathcal{S}$. Allora considerato il rapporto incrementale:*

$$\varphi_h(x) = \frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h}$$

*per $h \to 0$ si ha la convergenza in $\mathcal{S}$:*

$$\varphi_h \to D_k \varphi.$$

*Dimostrazione.* Passiamo alle trasformate di Fourier. Si ha

$$\mathcal{F}[\varphi_h] = \frac{\mathcal{F}[\tau_{-he_k}\varphi] - \mathcal{F}\varphi}{h} = \frac{\exp_{ihe_k}\mathcal{F}\varphi - \mathcal{F}\varphi}{h} = \frac{\exp_{ihe_k} - 1}{h}\mathcal{F}\varphi$$

mentre

$$\mathcal{F}[D_k\varphi] = (it_k)\mathcal{F}\varphi.$$

Dunque $\mathcal{F}[\varphi_h - \varphi] = \psi_h \mathcal{F}\varphi$ dove

$$\psi_h(t) = \frac{e^{iht_k} - 1}{h} - it_k.$$

Osserviamo che, per la formula di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange, si ha

$$e^{iht_k} = 1 + it_k h - \frac{1}{2}t_k^2 e^{-ih't_k}h^2$$

da cui

$$|\psi_h(t)| \leq \frac{ht_k^2}{2}.$$

Inoltre

$$D_k\psi_h = \frac{ihe^{iht_k}}{h} - i = i(e^{iht_k} - 1) = -h't_k$$

da cui

$$|D_k\psi_h| \leq h|t_k|.$$

E ancora

$$D_k^2\psi_h = -he^{iht_k}$$

da cui

$$\left|D_k^2\psi_h\right| \leq |h|$$

e iterando con le derivate successive con $m \geq 2$ si avrà

$$|D_k^m\psi_h| \leq |h|^{m-1}.$$

Osserviamo che la derivata rispetto ad ogni altra variabile è nulla e quindi si ha, in generale,

$$\left|D^\beta\psi_h(t)\right| \leq |h|(1 + |t|^2)$$

e

$$\begin{aligned}
\left|t^\alpha D^\beta\psi_h(t)\mathcal{F}\varphi(t)\right| &= \left|\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}D^{\beta-\gamma}\psi_h(t)t^\alpha D^\gamma\mathcal{F}\varphi(t)\right| \\
&\leq h\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}(1 + |t|^2)t^\alpha D^\gamma\mathcal{F}\varphi(t) \\
&\leq Ch\sum_{|\gamma|\leq\beta}\sum_{|\eta|\leq|\alpha+2|}q_{\beta,\eta}(\mathcal{F}\varphi) \to 0
\end{aligned}$$

per $h \to 0$. □

Definiamo il prodotto di convoluzione $f * \varphi$ con $f \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$ mediante la solita formula:

$$(f * \varphi)(x) = f[\tau_x \check{\varphi}].$$

**Teorema 92.** *Siano $f \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$. Allora $f * \varphi \in \mathcal{E}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ si ha*

$$D^\alpha(f * \varphi) = (D^\alpha f) * \varphi = f * D^\alpha \varphi.$$

*Inoltre $f * \varphi \in \mathcal{S}'$.*

*Dimostrazione.* Avendo a disposizione il lemma precedente possiamo riprodurre la dimostrazione del Teorema 65. Questo ci garantisce che $f * \varphi \in \mathcal{E}$ e che vale la formula per scaricare la derivata.

Vogliamo ora dimostrare che $f * \varphi$ ha crescita polinomiale, cosicché sarà dimostrato che $f * \varphi \in \mathcal{S}'$. Visto che $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ è continuo, sappiamo che esiste un intorno di zero in $\mathcal{S}$ che viene mandato nella palla unitaria di $\mathbb{C}$. Tale intorno contiene una intersezione finita di riscalati di palle unitarie per le seminorme $q_{\alpha,\beta}$. Dunque esisteranno un numero finito di coefficienti $c_{\alpha,\beta}$ tali che

$$|(f * \varphi)(x)| = |f[\tau_x \check{\varphi}]| \leq \sum c_{\alpha,\beta} q_{\alpha,\beta}(\tau_x \check{\varphi}).$$

Ora osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} q_{\alpha,\beta}(\tau_x \check{\varphi}) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| y^\alpha D^\beta \varphi(x-y) \right| \\ &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left| (x+z)^\alpha D^\beta \varphi(z) \right| \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |x^\gamma| \left| z^{\alpha-\gamma} D^\beta \varphi(z) \right| \\ &\leq \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |x^\gamma| q_{\alpha-\gamma,\beta}[\varphi]. \end{aligned}$$

E dunque $f * \varphi$ ha crescita al più polinomiale. □

**Teorema 93.** *Se $f \in \mathcal{S}'$ e $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha*

$$\mathcal{F}[f * \varphi] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\psi.$$

*Dimostrazione.* Si ha, per ogni $\psi \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * \varphi][\psi] = f * \varphi[\mathcal{F}\psi] &= \int (f * \varphi)(x) \cdot (\mathcal{F}\psi)(x)\, dx \\ &= \int f[\tau_x \check{\varphi}] \cdot (\mathcal{F}\psi)(x)\, dx = \int f[\mathcal{F}\psi(x] \cdot \tau_x \check{\varphi})\, dx \\ &= f\left( y \mapsto \int \mathcal{F}\psi(x) \cdot \varphi(x-y)\, dx \right) \\ &= f[\mathcal{F}\psi * \check{\varphi}] = f[\mathcal{F}\mathcal{F}(\mathcal{F}\check{\psi} * \varphi]) \\ &= (\mathcal{F}f)((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \psi \cdot \mathcal{F}\varphi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}f[\psi]. \end{aligned}$$

Lo scambio di $f$ con l'integrale viene fatto sul supporto di $\psi$ come avevamo già fatto in precedenza.

Abbiamo dimostrato dunque che le distribuzioni ai due lati dell'uguaglianza da dimostrare coincidono sull'insieme $\mathcal{D}$ che è denso in $\mathcal{S}$. Dunque coincidono su tutto $\mathcal{S}$. □

Il seguente risultato si dimostra in modo analogo a quanto già visto per le distribuzioni $\mathcal{D}'$ ed $\mathcal{E}'$.

**Teorema 94.** *Se* $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ *si ha*

$$(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$$

*Inoltre* $f * \varphi[\psi] = f[\psi * \check{\varphi}]$.

**Teorema 95.** *Per* $f \in \mathcal{S}'$ *e* $\varphi \in \mathcal{S}$ *si ha*

$$\mathcal{F}[f * \varphi] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}f$$

*e*

$$\mathcal{F}[\varphi \cdot f] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}f * \mathcal{F}\varphi.$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la prima uguaglianza in $\mathcal{S}'$. Per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * \varphi][\check{\psi}] &= f * \varphi[\mathcal{F}\check{\psi}] = ((f * \varphi) * \mathcal{F}\psi)(0) \\
&= (f * (\varphi * \mathcal{F}\psi))(0) = f[\check{\varphi} * \mathcal{F}\check{\psi}] \\
&= f[\mathcal{F}\mathcal{F}[\varphi * \mathcal{F}\psi]] = \mathcal{F}f[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}\mathcal{F}\psi] \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\mathcal{F}\varphi \cdot \mathcal{F}f)(\check{\psi}).
\end{aligned}$$

Dalla densità di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{S}$ otteniamo l'uguaglianza delle due distribuzioni.

Per quanto riguarda la seconda formula, ci riconduciamo alla prima:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\varphi \cdot f] &= \mathcal{F}[(\mathcal{F}\mathcal{F}\check{\varphi}) \cdot (\mathcal{F}\mathcal{F}\check{f})] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}\mathcal{F}[\mathcal{F}\check{f} * \mathcal{F}\check{\varphi}] \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}f * \mathcal{F}\varphi.
\end{aligned}$$

□

## 4.4 TRASFORMATA DI FOURIER-LAPLACE

Ricordiamo che la trasformata di Laplace (bilaterale) di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ è una funzione complessa definita da

$$\mathcal{L}[f](z) = \int f(t) e^{-(t,z)} \, dt.$$

Osserviamo che la convergenza dell'integrale è, sostanzialmente, determinata dalla parte reale di $z$ in quanto la parte immaginaria non contribuisce al modulo della funzione integranda. Nel caso $n = 1$ la trasformata di Laplace risulta quindi definita in una striscia verticale del piano complesso. La trasformata di Laplace risulta inoltre essere una funzione olomorfa e si può osservare che la trasformata di Fourier non è altro che la restrizione della trasformata di Laplace all'asse immaginario (a meno di una costante moltiplicativa).

Consideriamo $\mathbb{R}^n$ come un sottospazio di $\mathbb{C}^n$, le ennuple di numeri complessi. Estendiamo le notazioni usate per i numeri complessi alle ennuple: $z = x + iy$ con $z \in \mathbb{C}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Se $z \in \mathbb{C}^n$ e $t \in \mathbb{R}^n$ definiamo $(t, z) = t_1 z_1 + \cdots + t_n z_n$.

Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un aperto la funzione $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ si dice essere *olomorfa* se è continua ed è olomorfa separatamente in ogni variabile. Una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}^n$ si dice *intera*.

*funzione olomorfa*
*funzione intera*

Per le funzioni olomorfe di più variabili vale comunque un principio di identità.

**Lemma 96.** *Se una funzione intera si annulla su $\mathbb{R}^n$, allora tale funzione si annulla su tutto $\mathbb{C}^n$.*

*Dimostrazione.* Assumiamo noto il teorema nel caso $n = 1$ per le funzioni di una singola variabile complessa. Fissata $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ per ogni $k = 0, 1, \dots, n$ consideriamo la proposizione:

$$P_k: \quad z \in \mathbb{C}^n,\ z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R} \implies f(z) = 0.$$

L'ipotesi del teorema è $P_n$ e la tesi è $P_0$. Basterà quindi dimostrare che $P_k \implies P_{k-1}$.

Assumiamo $P_k$. Per dimostrare $P_{k-1}$ consideriamo $z \in \mathbb{C}^n$ con $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Essendo $f$ olomorfa, per definizione anche la funzione $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$g(\zeta) = f(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta, z_{k+1}, \dots, z_n)$$

è olomorfa. Inoltre $g$ si annulla su $\mathbb{R}$ in quanto vale $P_k$. Dunque $g$ è identicamente nulla. Questo significa che vale $P_{k-1}$. □

Definiamo la *trasformata di Fourier-Laplace* di una funzione $\varphi \in \mathcal{D}$ come l'estensione della trasformata di Fourier a tutto lo spazio complesso $\mathbb{C}^n$:

$\mathcal{FL}[\varphi]$

$$\mathcal{FL}[\varphi](z) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) e^{-i(z,t)}\, dt \tag{10}$$

Possiamo estendere la definizione appena data a tutte le distribuzioni a supporto compatto. Se $g \in \mathcal{E}'$ definiamo:

$\mathcal{FL}[g]$

$$\mathcal{FL}[g](z) := g[\exp_{-iz}] \tag{11}$$

dove $\exp_w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ è definita, per ogni $w \in \mathbb{C}^n$, da

$$\exp_z(x) = e^{(z,x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

**Lemma 97.** *La mappa $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{E}$ definita da $F(z) = \exp_z$ ovvero $F(z)(t) = \exp_z(x) = e^{(z,t)}$ è continua.*

*Dimostrazione.* Ricordando le proprietà della topologia su $\mathcal{E}$ dobbiamo mostrare che per ogni compatto $K$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ si abbia

$$\lim_{z \to z_0} \sup_{t \in K} \left| D^\alpha \exp_z(t) - D^\alpha \exp_{z_0}(t) \right| = 0.$$

L'estremo superiore su $K$ è in realtà un massimo. Dunque, se scegliamo $z_k \to z$ esisterà $t_k \in K$ che realizza il sup. Ma, a meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che $t_k \to t_0 \in K$ e dunque il limite sopra scritto risulta uguale a

$$\lim_k \left| D^\alpha \exp_{z_k}(t_k) - D^\alpha \exp_{z_0}(t_k) \right|.$$

Ma quest'ultimo limite è uguale a zero per la continuità della funzione $(D^\alpha \exp_z)(t) = z^\alpha \exp_z(t)$ nella coppia di variabili $(z, t)$. □

**Teorema 98.** *Sia $g \in \mathcal{E}'$. Allora $\mathcal{F}[g] \in \mathcal{E}$ e $\mathcal{F}[g](x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} g[\exp_{-ix}]$.*

*Dimostrazione.* Scegliamo $r > 0$ tale che $\operatorname{spt} g \subset \overline{B_r}$. Consideriamo $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi = 1$ su $B_{r+1}$ cosicché risulta $g = \psi \cdot g$ e

$$\mathcal{F}[g] = \mathcal{F}[\psi \cdot g] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[g] * \mathcal{F}[\psi].$$

Significa quindi che $\mathcal{F}[g] \in \mathcal{E}$. Visto che $\psi \in \mathcal{S}$ esiste $\varphi \in \mathcal{S}$ tale che $\psi = \mathcal{F}[\varphi]$. Dunque

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}[g](x) &= (\mathcal{F}[g] * \mathcal{F}[\psi])(x) = (\mathcal{F}[g] * \check{\varphi})(x) \\ &= \mathcal{F}[g][\tau_x \varphi] = g[\mathcal{F}[\tau_x \varphi]] \\ &= g[\exp_{-ix} \mathcal{F}\varphi] = g[\psi \exp_{-ix}] \\ &= g[\exp_{-ix}].\end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che $\mathcal{F}[g](x) = g[\exp_{-ix}]$ per $x \in \mathbb{R}^n$. □

**Teorema 99** (Paley-Wiener)**.** *Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{spt} \varphi \subset \overline{B_r}$ dove $B_r$ è la palla aperta di raggio $r > 0$ centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$. Posto $f = \mathcal{FL}[\varphi]$ si ha che $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ è intera e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esiste $C_\alpha$ tale che*

$$|z^\alpha f(z)| \le C_\alpha e^{r|\operatorname{Im} z|}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{N}^n. \tag{12}$$

*Viceversa se una funzione intera $f$ soddisfa (12) allora esiste $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{spt} \varphi \in \overline{B_r}$ tale che $f = \mathcal{FL}[\varphi]$ che soddisfa la relazione*

$$\varphi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}[f].$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che si ha

$$\left| e^{-i(t,x+iy)} \right| = \left| e^{-i(t,x)} e^{(t,y)} \right| = \left| e^{(t,y)} \right| \le e^{|t||y|}$$

Cioè, se $t \in B_r$, $\left| e^{-i(t,z)} \right| \le e^{r|\operatorname{Im} z|}$. Dunque la funzione integranda in (10) è localmente limitata, al variare di $z$, uniformemente in $t$ e quindi, per convergenza dominata, possiamo affermare che la funzione $f(z)$ sia continua. Inoltre, siccome il nucleo $e^{-i(t,z)}$ è notoriamente una funzione olomorfa (e quindi ha integrale nullo su ogni curva chiusa), applicando il teorema di Morera si ottiene (tramite uno scambio di integrali) che anche $f(z)$ è una funzione olomorfa (il teorema può essere applicato ad ogni variabile $z_j$ separatamente). In formule, posto $g(z_k) := f(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)$ si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma g(z_k)\, dz_k &= \int_\gamma \left( \int_{\operatorname{spt}\varphi} \varphi(t) e^{-i(t,z)}\, dt \right) dz_k \\ &= \int_{\operatorname{spt}\varphi} \left( \int_\gamma e^{-i(t,z)}\, dz_k \right) \varphi(t)\, dt = 0.\end{aligned}$$

Dunque $f$ è una funzione intera.

Osserviamo che, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}z_j \cdot f(z) &= \int \varphi(t) z_j e^{-i(t,z)}\, dt = i \int \varphi(t) \frac{\partial}{\partial t_j} e^{-i(t,z)}\, dt \\ &= -i \int (D_j \varphi(t)) e^{-i(t,z)}\, dt\end{aligned}$$

da cui, iterando,

$$z^\alpha f(z) = \int (-iD)^\alpha \varphi(t) e^{-i(t,z)}\, dt.$$

Dunque

$$|z^\alpha \cdot f(z)| \le \|\varphi\|_{|\alpha|} \cdot |\operatorname{spt}\varphi| \cdot e^{r|\operatorname{Im} z|}$$

da cui si ottiene (12).

Supponiamo ora che $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sia olomorfa e soddisfi (12). Consideriamo la restrizione $\tilde{f}$ di $f$ a $\mathbb{R}^n$. Essendo $f$ olomorfa risulta che $\tilde{f} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre la stima (12) ci dice che $\tilde{f} \in \mathcal{S}$ in quanto la parte esponenziale sparisce quando $\operatorname{Im} z = 0$. Dunque sappiamo che $\tilde{f} = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\tilde{f}]$ da cui risulta che la funzione

$$\varphi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \check{\mathcal{F}}[\tilde{f}] \in \mathcal{S}$$

soddisfa la relazione $\mathcal{F}[\varphi] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} f$ cioè

$$f(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[\varphi](x) = \int \varphi(t) e^{-i(t,x)}\, dx$$

che è (10) nel caso $z = x \in \mathbb{R}^n$.

Vogliamo ora mostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+iy) e^{i(t,x+iy)}\, dx \tag{13}$$

(cioè la funzione sul lato destro è costante in $y$).

Fissati $t \in \mathbb{R}$, $z_j \in \mathbb{C}$ per $j \neq k$ consideriamo, al variare di $z_k \in \mathbb{C}$ la funzione

$$g(z_k) = f(z) e^{i(t,z)}$$

dove si intende che $z = (z_1, \dots, z_k, \dots z_n)$ è funzione di $z_k$. Chiaramente $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa e quindi il suo integrale di linea si annulla sulla curva chiusa $\gamma_N$ che percorre la frontiera della rettangolo $[-N, N] \times [0, h]$ nel piano complesso. Osserviamo che sui due lati verticali del rettangolo si ha $|\zeta| \ge N$ e quindi $|g(\zeta)| \le C/N^2$ per (12). Osserviamo anche che posto $z = x + iy$ si ha $\left| e^{i(t,z)} \right| = e^{-(t,y)}$ e dunque sui lati verticali del rettangolo la funzione esponenziale non dipende da $N$ ed è quindi uniformemente limitata. Dunque per $N \to \infty$ il contributo dei lati verticali del rettangolo tende a zero e si ottiene che gli integrali sulle due rette orizzontali $y_k = 0$ e $y_k = h$ coincidono.

Dunque la funzione

$$G(y_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_k + iy_k)\, dx_k$$

risulta costante in $y_k$. Ripetendo il ragionamento per ogni $k = 1, \dots, n$ si ottiene che (13) è verificata.

Vogliamo ora dimostrare che $\operatorname{spt}\varphi \subset \overline{B_r}$ cioè che per ogni $t \in \mathbb{R}^n$ con $|t| > r$ si ha $\varphi(t) = 0$. Osserviamo che, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned}
|\varphi(t)| &\le \int |f(x+iy)| \left| e^{i(t,x)} e^{-(t,y)} \right| dx \\
&\le \int \frac{(1+|x|^2)^n}{(1+|x|^2)^n} |f(x+iy)| \cdot e^{-(t,y)}\, dx \\
&\le \int \frac{Ce^{r|y|}}{(1+|x|^2)^n} e^{-(t,y)}\, dx \\
&\le C' e^{r|y|-(t,y)}.
\end{aligned}$$

Scegliendo ora $y = kt/|t|$ con $k \to +\infty$ essendo $|t| > r$ si ottiene

$$e^{r|y|-(t,y)} = e^{k(r-|t|)} \to 0.$$

In tal caso si ottiene dunque $\varphi(t) = 0$.

Ci rimande infine da verificare che $\varphi$ soddisfa l'equazione (10) per ogni $z \in \mathbb{C}^n$. Abbiamo già visto che l'equazione è verificata per $z = x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre abbiamo verificato che $\varphi$ soddisfa le ipotesi della prima parte del teorema, quindi il lato destro di (10) è una funzione intera, come lo è il lato sinistro, $f(z)$, per ipotesi. Dunque abbiamo due funzioni intere che coincidono su $\mathbb{R}^n$ e per il Lemma precedente esse devono coincidere su tutto $\mathbb{C}^n$. □

**Teorema 100** (Paley-Wiener)**.** *Sia* $g \in \mathcal{E}'$ *con* $\operatorname{spt} g \subset \overline{B_r}$, $r > 0$. *Allora posto* $f := \mathcal{FL}[g]$ *risulta che* $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *è intera ed esiste* $C > 0$ *tale che se* $N$ *è l'ordine di* $g$ *si ha*

$$|f(z)| \le C(1+|z|)^N e^{r|\operatorname{Im} z|}. \tag{14}$$

*Viceversa se* $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *è intera e soddisfa* (14) *per qualche* $C$, $r > 0$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *allora esiste* $g \in \mathcal{E}'$ *con* $\operatorname{spt} g \in \overline{B_r}$ *tale che* $f = \mathcal{FL}[g]$.

*Dimostrazione.* E' chiaro che $f$ è continua, in quanto $z \mapsto \exp_{-iz}$ è continua in $\mathcal{E}$ e $g$ è continua su $\mathcal{E}$. Per dimostrare che $f$ è olomorfa, in base al teorema di Morera è sufficiente mostrare che l'integrale di $f$ è nullo su ogni curva chiusa contenuta in un piano coordinato complesso. Sia $z = z(s)$ una tale curva chiusa. Allora, scambiando $g$ con l'integrale si ha

$$\int f(z(s))\, ds = \int g[\exp_{-iz(s)}]\, ds = g\left[\int \exp_{-iz(s)}\, ds\right].$$

Ma

$$\left(\int \exp_{-iz(s)}\, ds\right)(t) = \int e^{-i(t,z(s))}\, ds = 0$$

in quanto $\exp_{-it}$ è essa stessa olomorfa. Dunque risulta anche $\int f = 0$ su tale curva che significa che $f$ è olomorfa.

Dobbiamo ora mostrare la stima (14). Consideriamo, per $z \neq 0$, la funzione

$$\varphi_z(t) := e^{-i(t,z)} h((|t|-r)|z|)$$

con $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^\infty$ che vale $h(s) = 1$ quando $s \le 1$ e $h(s) = 0$ se $s \ge 2$. E' facile verificare che $\varphi_z \in \mathcal{D}$ ha supporto compatto.

Si vede inoltre che il supporto di $\varphi_z - \exp_z$ ha chiusura disgiunta dalla palla $\overline{B_r}$ e quindi dal supporto di $g$. Dunque

$$|f(z)| = |g[\varphi_z]| \le C\|\varphi_z\|_N$$

visto anche che $g$ ha ordine $N$. Inoltre, applicando la regola di Leibniz, si trova

$$D^\alpha \varphi_z = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (-iz)^\beta e^{-i(t,z)} |z|^{|\alpha-\beta|} \frac{t^{\alpha-\beta}}{|t|^{|\alpha-\beta|}} D^{|\alpha-\beta|} h.$$

Sul supporto di $\varphi_z$ si ha $(|t|-r)|z| \le 2$ cioè $|t| \le 2/|z| + r$ da cui

$$\left|e^{-i(t,z)}\right| = e^{(t,\operatorname{Im} z)} \le e^{2+r|\operatorname{Im} z|} = e^2 e^{r|\operatorname{Im} z|}.$$

Quindi

$$\|D^\alpha \varphi_z\|_0 \le \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |z|^{|\beta|} e^2 e^{r|\operatorname{Im} z|} \cdot |z|^{|\alpha-\beta|} \left\|D^{|\alpha-\beta|} h\right\|_0 \le C|z|^{|\alpha|} e^{r|\operatorname{Im} z|}$$

da cui, osservando che $|z|^{|\alpha|} \le (1+|z|)^{|\alpha|} \le (1+|z|)^N$ discende la stima (14).

Supponiamo ora di avere una funzione intera $f$ che soddisfa (14). Dunque per $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|f(x)| \le C(1+|x|)^N$$

cioè la distribuzione $\tilde f$ corrispondente alla restrizione di $f$ al piano reale $\mathbb{R}^n$ ha crescita al più polinomiale dunque $\tilde f \in \mathcal{S}'$.

Consideriamo allora

$$g := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \check{\mathcal{F}}[\tilde f] \in \mathcal{S}'.$$

Applicando la trasformata di Fourier si ottiene

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[g] = \check{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\tilde f] = \tilde f$$

cioè, in base al Teorema 98:

$$f(x) = g[\exp_{-ix}] \tag{15}$$

che è la nostra tesi nel caso $z = x \in \mathbb{R}^n$. Dunque $g$ è l'unica distribuzione che può soddisfare la tesi.

Vogliamo ricondurci al Teorema 99 mediante mollificazione di $g$. Scelto un nucleo di convoluzione $\rho_\varepsilon$ con $\operatorname{spt} \rho_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ definiamo

$$g_\varepsilon := g * \rho_\varepsilon.$$

Allora

$$\mathcal{F}[g_\varepsilon] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}[g] \cdot \mathcal{F}[\rho_\varepsilon] = \check{f} \cdot \mathcal{F}[\rho_\varepsilon].$$

Il Teorema 99 può essere applicato alla funzione $\rho_\varepsilon$ e ci dice che la funzione $\mathcal{F}[\rho_\varepsilon]$ può essere estesa a tutto lo spazio complesso $\mathbb{C}^n$ e soddisfa la stima

$$|z^\alpha \mathcal{F}[\rho_\varepsilon](z)| \le C_\alpha e^{-\varepsilon|\operatorname{Im} z|}.$$

Cambiando le costanti possiamo riscrivere questa stima nella forma:

$$|z^\alpha| \cdot (1 + |z|)^N \cdot |\mathcal{F}[\rho_\varepsilon](z)| \leq C'_\alpha e^{\varepsilon|\operatorname{Im} z|}.$$

Se definiamo $f_\varepsilon(z) := f(z) \cdot \mathcal{F}[\rho_\varepsilon](z)$ e ricordiamo che $f$ soddisfa per ipotesi (14) otteniamo che anche $f_\varepsilon$ soddisfa la stima (12) con $r + \varepsilon$ al posto di $r$. Dunque applicando la parte inversa del Teorema 99 si ottiene che $f_\varepsilon = \mathcal{F}[\varphi_\varepsilon]$ con $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}$ e $\operatorname{spt} \varphi_\varepsilon \subset \overline{B_{r+\varepsilon}}$. Ma $f_\varepsilon = \mathcal{F}[g_\varepsilon]$ e dunque $g_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$. Abbiamo dunque ottenuto che $\operatorname{spt} g_\varepsilon \subset \overline{B_{r+\varepsilon}}$. Per dimostrare che $\operatorname{spt} g \subset \overline{B_r}$ è sufficiente mostrare che per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ con supporto disgiunto da $\overline{B_r}$ si ha $g(\psi) = 0$. Ricordando che $g_\varepsilon \to g$ e osservando che quando $\varepsilon$ è sufficientemente piccolo il supporto di $\psi$ risulta anche disgiunto da $B_{r+\varepsilon}$ e quindi dal supporto di $g_\varepsilon$, si ha dunque

$$g[\psi] = \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon[\psi] = 0.$$

Abbiamo dunque dimostrato che $g \in \mathcal{E}'$ e $\operatorname{spt} g \subset \overline{B_r}$. Dunque la funzione $g$ verifica la prima parte del Teorema, e di conseguenza sappiamo che $g[\exp_{-iz}]$ è una funzione intera così come lo è $f$ per ipotesi. Ma, (15) ci dice che le due funzioni coincidono su $\mathbb{R}^n$ e dunque devono coincidere su tutto $\mathbb{C}^n$ per il Lemma 96. $\square$

# 5 APPLICAZIONI ALLE EDP

Siamo interessato allo studio (esistenza e regolarità) delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti. Più precisamente a equazioni del tipo:

$$P(-iD)[u] = \varphi \tag{16}$$

dove $P$ è un polinomio.

Più esplicitamente se $P$ è il polinomio

$$P(t) = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha t^\alpha = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha t_1^{\alpha_1}\dots t_n^{\alpha_n}$$

si intende che

$$P(-iD)[u] = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha (-i)^{|\alpha|} D^\alpha u.$$

Si preferisce valutare il polinomio in $-iD$ invece che più semplicemente in $D$ perché questo semplifica la notazione quando poi passeremo alle trasformate di Fourier. Ovviamente non c'è alcuna differenza sostanziale tra le due notazioni.

Una distribuzione $u_0 \in \mathcal{D}'$ si dice essere una *soluzione fondamentale* dell'equazione (16) se soddisfa l'equazione con la delta di Dirac a secondo membro:

*soluzione fondamentale*

$$P(-iD)[u_0] = \delta_0.$$

Nell'introduzione abbiamo ad esempio verificato che la funzione

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{\log|x|}{2\pi} & \text{per } n = 2 \\ \frac{2-n}{\sigma_n |x|^{n-2}} & \text{per } n \ge 3 \end{cases}$$

è una soluzione fondamentale dell'equazione $\Delta u = \varphi$. Osserviamo, a proposito, che $\Delta = P(-iD)$ se scegliamo $P(t) = -|t|^2$.

Se abbiamo una soluzione fondamentale e se $\varphi$ ha supporto compatto, allora una soluzione di (16) è data da $u_0 * \varphi$, infatti:

$$P(-iD)[u_0 * \varphi] = P(-iD)[u_0] * \varphi = \delta_0 * \varphi = \varphi.$$

Ogni altra soluzione differisce da $u_0 * \varphi$ per una soluzione dell'equazione omogenea associata: $P(-iD)[u] = 0$.

Osserviamo che il prodotto di convoluzione $u_0 * \varphi$ potrebbe avere senso anche se $\varphi$ non ha supporto compatto se abbiamo informazioni sul comportamento all'infinito di $u_0$.

Osserviamo però che $u_0$ non potrà mai avere supporto compatto perché se $P(-iD)[u_0] = \delta$, passando alle trasformate di Fourier si avrebbe $P \cdot \mathcal{F}u_0 = 1$. Ma per il Teorema 100 si avrebbe che $\mathcal{F}u_0$ è una funzione intera mentre, se $P$ non è costante, $\mathcal{F}u_0$ dovrebbe tendere ad infinito nei punti in cui $P$ si annulla. Si ha infatti il seguente risultato, che può essere facilmente ottenuto riconducendosi al teorema fondamentale dell'algebra.

**Lemma 101.** *Se $P(z)$ è un polinomio non costante di $n$ variabili complesse allora esiste $z \in \mathbb{C}^n$ tale che $P(z) = 0$.*

Nei casi in cui $1/P \in \mathcal{S}'$ da $P \cdot \mathcal{F}u_0 = 1$ si può scrivere

$$u_0 = \check{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{P}\right).$$

Ad esempio per il laplaciano $P(t) = -|t|^2$ si osserva che $1/P \in L^1_{loc}$ quando $n > 2$ e in tal caso si ha anche $1/P \in \mathcal{S}'$. Abbiamo però osservato che una soluzione fondamentale $u_0(x) = \ln|x|/(2\pi)$, $u_0 \in \mathcal{S}'$, esiste anche per $n = 2$, quindi si ha $-\Delta u_0 = \delta_0$ che, passando alle trasformate di Fourier dà

$$|t|^2\mathcal{F}[u_0] = 1.$$

Risulta quindi che $f_0 = \mathcal{F}u_0 \in \mathcal{S}'$ è una distribuzione che coincide con $1/|t|^2$ fuori dall'origine. Ma siccome $1/|t|^2$ non è localmente integrabile l'identità:

$$f_0[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(t)}{|t|^2}\, dt$$

vale solamente se il supporto di $\varphi$ non contiene il punto 0.

Il nostro scopo sarà ora quello di dimostrare il teorema di Malgrange: l'equazione $P(-iD)[u] = \delta_0$ ammette sempre soluzione in $\mathcal{D}'$ se $P$ non è identicamente nullo.

Introduciamo una nuova notazione. La mappa $\tau \mapsto e^{i\tau}$ manda la retta reale $\mathbb{R}$ sulla circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$. Consideriamo l'analogo vettoriale: per $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo *$e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^n$*

$$e^{i\theta} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \in \mathbb{C}^n.$$

L'immagine di tale mappa è il toro piatto di $\mathbb{C}^n$ e si può parametrizzare restringendo tale mappa al cubo $[0, 2\pi]^n \subset \mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che le funzioni olomorfe hanno parte reale e parte immaginaria armonica, e quindi soddisfano la proprietà della media. In particolare se $f$ è intera su $\mathbb{C}$ si ha per ogni $z \in \mathbb{C}$ e ogni $r > 0$: *proprietà della media*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{17}$$

Il seguente lemma verrà utilizzato nel prossimo teorema. Serve ad poter affermare che se sappiamo che una funzione intera $f$ è piccola se moltiplicata per un polinomio, allora, a maggior ragione, la funzione stessa è piccola. Per i polinomi di una sola variabile il risultato è ovvio perché il modulo di un polinomio di una variabile tende ad infinito. Ma questo non è ovvio per i polinomi di più variabili, che possono avere delle linee su cui si annullano (si pensi ad esempio a $P(z_1, z_2) = z_1 - z_2$).

**Lemma 102.** *Se $P$ è un polinomio in $\mathbb{C}^n$ non nullo e $N$ è il grado di $P$ allora c'è una costante $C > 0$ tale che per ogni funzione intera $f$, per ogni $z \in \mathbb{C}^n$ e ogni $r > 0$ si ha*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{r^N}\int_{[0,2\pi]^n} |f \cdot P|(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

*Dimostrazione.* Sia $F(\zeta)$ una funzione intera di una variabile complessa $\zeta \in \mathbb{C}$ e sia $Q$ un generico polinomio

$$Q(\zeta) = a \prod_{j=1}^{N} (\zeta - \zeta_j).$$

Posto

$$Q_0(\zeta) := a \prod_{j=1}^{N} (1 - \overline{\zeta_j} \zeta)$$

si osserva che essendo $\zeta \cdot \overline{(\zeta - \zeta_j)} = |\zeta|^2 - \overline{\zeta_j}\zeta$ abbiamo che $|Q_0(\zeta)| = |Q(\zeta)|$ se $|\zeta| = 1$. Usando la proprietà della media per la funzione intera $F \cdot Q_0$, si ha

$$\begin{aligned} |a| \cdot |F|(0) = |F \cdot Q_0|(0) &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F \cdot Q_0|(e^{i\tau})\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F \cdot Q|(e^{i\tau})\, d\tau \end{aligned} \tag{18}$$

e inoltre $|a|$ può essere ottenuto da $Q$ guardando il comportamento all'infinito:

$$\lim_{|\zeta| \to \infty} \frac{|Q(\zeta)|}{|\zeta|^N} = \lim_{|\zeta| \to \infty} |a| \prod_{j=1}^{N} \left|1 - \zeta_j / \zeta\right| = |a|.$$

Fissati ora $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}^n$ definiamo

$$F(\zeta) := f(z + \zeta w), \qquad Q(\zeta) := P(z + \zeta w).$$

Si può verificare che $F$ è una funzione intera (esercizio: se $z \mapsto f(z)$ è intera anche $z \mapsto f(zw)$ è intera per ogni $w \in \mathbb{C}^n$). E $Q(\zeta)$, chiaramente, è un polinomio. Dunque, applicando (18)

$$\begin{aligned} |a| \cdot |f(z)| = |F(0)| &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F \cdot Q|(e^{it})\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f \cdot P|(z + e^{it} w)\, dt. \end{aligned}$$

Il generico polinomio $P$ può essere scritto nella forma

$$P(z) = \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha z^\alpha$$

dunque il coefficiente $|a|$ è dato dal seguente limite per $|\zeta| \to \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{|P(z + \zeta w)|}{|\zeta|^N} &= \left| \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha \frac{(z + \zeta w)^\alpha}{|\zeta|^N} \right| = \left| \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha \frac{(z/\zeta + w)^\alpha}{|\zeta|^{N - |\alpha|}} \right| \\ &\to \left| \sum_{|\alpha| = N} c_\alpha w^\alpha \right| = P_N(w) \end{aligned}$$

dove

$$P_N(z) = \sum_{|\alpha| = N} c_\alpha z^\alpha$$

è la componente omogenea di grado massimo del polinomio $P$.

Otteniamo quindi

$$|P_N(w)||f(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\cdot P|(z+e^{it}w)\,dt. \tag{19}$$

Osserviamo ora che ponendo $w = re^{i\theta}$ e integrando il lato destro della disuguaglianza al variare di $\theta \in [0,2\pi]^n$ si ottiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{[0,2\pi]^n} |f\cdot P|(z+re^{i\tau}e^{i\theta})\,d\theta\right)d\tau = \int_{[0,2\pi]^n} |f\cdot P|(z+re^{i\theta})\,d\theta$$

in quanto

$$e^{i\tau}e^{i\theta} = (e^{i(\tau+\theta_1)},\dots,e^{i(\tau+\theta_n)})$$

e facendo i cambi di variabile $\sigma_j = \tau+\theta_j$ si osserva che l'integrale non dipende da $\tau$.

Integrando invece il lato sinistro della disuguaglianza (19) si ottiene $|f(z)|$ moltiplicato per la seguente quantità:

$$K = \int_{[0,2\pi]^n}\left|P_N(re^{i\theta})\right|d\theta$$

che vogliamo dimostrare essere positiva. L'unica possibilità per cui $K$ sia nulla è che $P_N$ si annulli identicamente sul toro $re^{i\theta}$ con $\theta\in[0,2\pi]^n$ cioè che $P_N(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}) = 0$ per ogni $\theta_1,\dots,\theta_n\in\mathbb{R}$. Sappiamo però che $z_1 \mapsto P_N(z_1,\dots z_n)$ è olomorfa su $\mathbb{C}$, quindi se si annulla su ogni $z_1 = e^{i\theta_1}$ necessariamente si annulla per ogni $z_1\in\mathbb{C}$ (in quanto l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla non può avere punti di accumulazione). Dunque $P_N(z_1,e^{i\theta_2},\dots e^{i\theta_n})$ si annulla per ogni $z_1\in\mathbb{C}$ e ogni $\theta_2,\dots,\theta_n\in\mathbb{R}$. Iterando il procedimento sulle variabili successive si ottiene che $P_N$ è identicamente nulla.

Ma $P_N$ non può essere identicamente nulla perché $N$ è il grado del polinomio $P$ e $N\geq 0$. Dunque $K>0$ e posto $C = 1/K$ si ottiene la stima cercata. □

**Teorema 103.** *Sia $P$ un polinomio in $n$ variabili, e $g\in\mathcal{E}'$ una distribuzione a supporto compatto. Se $u\in\mathcal{E}'$ è una soluzione (a supporto compatto) di*

$$P(-iD)[u] = g$$

*allora esiste una funzione intera $f$ tale che $P\cdot f = \mathcal{FL}[g]$.*

*Viceversa se esiste una funzione intera $f$ tale che $P\cdot f = \mathcal{FL}[g]$ allora l'equazione differenziale $P(-iD)[u] = g$ ha una unica soluzione $u\in\mathcal{E}'$ il cui supporto è contenuto nell'inviluppo convesso del supporto di $g$.*

*Dimostrazione.* Se $u$ è una distribuzione a supporto compatto che soddisfa $P(-iD)[u] = g$ allora passando alle trasformate di Fourier (ricordiamo che $\mathcal{FL}[D^\alpha\varphi](t) = (it)^\alpha\mathcal{FL}[\varphi]$) si ottiene

$$P\cdot\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[g].$$

Il Teorema 100 garantisce che $f(z) = \mathcal{FL}[u](z)$ sia una funzione intera.

Supponiamo viceversa che esista $f$ intera tale che $P\cdot f = \mathcal{FL}[g]$. Scegliamo $r>0$ tale che $\operatorname{spt} g\subset\overline{B_r}$. Il Teorema 100 garantisce che

$$|P\cdot f|(z) = |\mathcal{FL}[g]|(z) \leq \gamma(1+|z|)^N e^{i|\mathrm{Im}(z)|}$$

mentre dal lemma precedente possiamo affermare che

$$|f(z)| \le C \int_{[0,2\pi]^n} |P \cdot f|(z + e^{i\theta})\, d\theta$$

dunque

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le C\gamma \int_{[0,2\pi]^n} (1 + \left|z + e^{i\theta}\right|) e^{r\left|\mathrm{Im}(z+e^{i\theta})\right|}\, d\theta \\ &\le C' \int_{[0,2\pi]^n} (1 + |z|)^N e^{r|\mathrm{Im}(z)|}\, d\theta \\ &\le C''(1 + |z|)^N e^{r|\mathrm{Im}(z)|}. \end{aligned}$$

Dunque possiamo applicare la seconda parte del Teorema 100 e ottenere che $f(z) = \mathcal{FL}[u]$ per una qualche distribuzione $u$ a supporto compatto in $\overline{B_r}$. Ma allora $P \cdot \mathcal{FL}[u] = P \cdot f = \mathcal{FL}[g]$ da cui, invertendo la trasformata di Fourier, si ottiene come voluto: $P(-iD)[u] = g$.

Il ragionamento precedente può essere ripetuto su ogni palla $\overline{B_r(x)}$ che contiene il supporto di $g$ ricavando che la stessa palla contiene il supporto di $u$. Dunque il supporto di $u$ è contenuto nell'inviluppo convesso del supporto di $g$ in quanto per ogni punto fuori dall'inviluppo convesso è possibile trovare una palla che contiene il supporto di $g$ ma non il punto scelto. □

**Teorema 104** (Malgrange-Ehrenpreis)**.** *Se $P$ è un polinomio complesso di $n$ variabili, non nullo, allora esiste $u_0 \in \mathcal{D}'$ soluzione di*

$$P(-iD)[u] = \delta_0$$

*(cioè $u_0$ è una soluzione fondamentale dell'operatore differenziale $P(-iD)$).*

*Dimostrazione.* Osserviamo che per ogni $u \in \mathcal{D}'$ si ha

$$(D^\alpha u)[\varphi] = \check{u}(D^\alpha \check{\varphi})$$

e quindi

$$P(-iD)[u][\varphi] = \check{u}[P(-iD)[\check{\varphi}]].$$

Affinché $u$ risolva $P(-iD)[u] = \delta_0$ dovrà quindi valere, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$u[P(-iD)[\check{\varphi}]] = \check{\delta}_0[\varphi] = \varphi(0).$$

Consideriamo ora la mappa lineare $L\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ definita da $L[\varphi] = P(-iD)[\varphi]$. Vogliamo mostrare che $L$ è iniettiva. Se $L[\varphi] = 0$ si ha $P(-iD)[\varphi] = 0$ e passando alle trasformate di Fourier $P \cdot \mathcal{F}[\varphi] = 0$. Dunque $\mathcal{F}[\varphi]$, che è una funzione regolare essendo $\varphi \in \mathcal{S}'$, si annulla in tutti i punti in cui non si annulla $P$. Ma l'insieme degli zeri di un polinomio non nullo ha parte interna vuota (esercizio!) quindi $\mathcal{F}[\varphi]$ si annulla su un denso di $\mathbb{R}^n$ e, per continuità, risulta quindi $\mathcal{F}[\varphi] = 0$. Da cui $\varphi = 0$ e quindi $L$ è iniettiva.

Posto $Y$ l'immagine dell'operatore $L$ consideriamo $\delta_0\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. Siccome $L$ è iniettiva esiste una mappa lineare $U\colon Y \to \mathbb{C}$ che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "\delta_0"] & Y \subset \mathcal{D}' \arrow[d, dashed, "U"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Se sapessimo che $U$ è continua concluderemmo la dimostrazione come segue. Applicando il teorema di Hahn-Banach potremmo ottenere una mappa continua $u\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ che estende $U$. Dunque $u$ sarebbe una distribuzione che soddisfa

$$u[L[\varphi]] = \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

e quindi risolverebbe l'equazione $P(-iD)[u] = \delta_0$.

Il nodo della dimostrazione si riduce quindi a mostrare che la mappa $U\colon Y \subset \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ è continua. Per le proprietà della topologia di $\mathcal{D}$ è sufficiente mostrare che per ogni compatto $K$ la mappa $U\colon Y \cap \mathcal{D}_K \to \mathbb{C}$ è continua. Sia dunque $\psi_j \to 0$ in $Y \cap \mathcal{D}_K$. Vogliamo mostrare che $U(\psi_j) \to 0$ in $\mathbb{C}$. Si ha $U(\psi_j) = \varphi_j(0)$ dove $\varphi_j \in \mathcal{D}$ è l'unica distribuzione tale che $L[\varphi_j] = P(-iD)[\varphi_j] = \psi_j$. Passando alle trasformate di Fourier-Laplace (teorema 100): si ha su $\mathbb{C}^n$: $\mathcal{FL}[\psi_j] = P \cdot \mathcal{FL}[\varphi_j]$ con $\mathcal{FL}[\varphi_j]$ funzione intera. Per il Lemma 102 si ha dunque

$$\left|\mathcal{FL}[\varphi_j](z)\right| \le \frac{C}{r^N} \int_{[0,2\pi]^n} \left|(\mathcal{FL}[\psi_j])(z + re^{i\theta})\right| d\theta.$$

Ma ora ricordiamo che

$$\begin{aligned}
U(\psi_j) &= \varphi_j(0) = (\check{\mathcal{F}}\mathcal{FL}\varphi_j)(0) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \mathcal{FL}\varphi_j(x)\,dx \\
&\le (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{C}{r^N} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{[0,2\pi]^n} \left|(\mathcal{FL}\psi_j)(x + re^{i\theta})\right| d\theta\,dx \\
&= C' \int_{[0,2\pi]^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\tau_{-re^{i\theta}} \mathcal{FL}\psi_j\right|(x)\,dx\,d\theta \\
&= C' \int_{[0,2\pi]^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{FL}[\exp_{re^{i\theta}} \cdot \psi_j]\right|(x)\,dx\,d\theta \\
&= C' \int_{[0,2\pi]^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{FL}[\psi_{\theta,j}]\right|(x)\,dx\,d\theta
\end{aligned}$$

avendo posto $\psi_{\theta,j} := \exp_{re^{i\theta}} \cdot \psi_j$. Per mostrare che $U(\psi_j) \to 0$ è sufficiente mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j_0$ tale che si abbia

$$\left|\mathcal{FL}[\psi_{\theta,j}]\right|(x) \le \frac{\varepsilon}{(1+|x|^2)^n} \qquad \forall j \ge j_0, \forall \theta \in [0,2\pi]^n$$

in quanto l'integrale del lato destro di questa disuguaglianza può essere reso piccolo a piacere scegliendo $\varepsilon$ sufficientemente piccolo. Ma infatti, visto che $\psi_j \to 0$ in $\mathcal{D}_K$, sappiamo che tutte le derivate di $\psi_j$ tendono a zero uniformemente. D'altra parte le derivate di $\exp_{re^{i\theta}}$ sono uniformemente limitate sul compatto $K$ e quindi le derivate del prodotto $\psi_{\theta,j}$ tendono a zero uniformemente su $K$ e anche uniformemente in $\theta$. Scelto il polinomio $Q(t) = (1 + |t|^2)^n$ possiamo dunque trovare un indice $j_0$ tale che si abbia $\left\|Q(-iD)\psi_{\theta,j}\right\|_{L^2} < \varepsilon$ e dunque, essendo $\mathcal{F}$ una isometria su $L^2$ si avrà anche $\left\|\mathcal{F}[Q(-iD]\psi_{\theta,j})\right\|_{L^2} < \varepsilon$. Osserviamo però che

$$\mathcal{F}[Q(-iD) \cdot \psi_{\theta,j}](x) = Q(x) \cdot (\mathcal{F}\psi_{\theta,j})(x) = (1 + x^2)^n (\mathcal{F}\psi_{\theta,j})(x)$$

dunque, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}\psi_{\theta,j}| &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+x^2)^n} \cdot (1+x^2)^n |\mathcal{F}\psi_{\theta,j}(x)|\, dx \\ &\leq \left\| \frac{1}{(1+x^2)^n} \right\|_{L^2} \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

□

## 5.1 SPAZI DI SOBOLEV

Diremo quindi che una distribuzione $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è in $L^p_{loc}$ se esiste una funzione $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ tale che

$$f[\varphi] = \int_\Omega \tilde{f}(x) \cdot \varphi(x)\, dx$$

per ogni $\varphi \in D(\Omega)$.

Analogamente se $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ diremo che $D^\alpha f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se esiste una funzione $g_\alpha \in L^p_{loc}(\Omega)$ tale che

$$D^\alpha f[\varphi] = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \cdot D^\alpha \varphi = \int_\Omega g_\alpha \varphi$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Se $f \in C^k(\Omega)$ abbiamo quindi una ambiguità sul significato di $D^\alpha f$ che può essere inteso o come l'usuale derivata puntuale (limite del rapporto incrementale) oppure come la *derivata distribuzionale $D^\alpha f$*. Il contesto renderà chiara la distinzione.

**Definizione 105.** *Se $\Omega$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, definiamo*

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &:= \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) \colon D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \leq m \right\}, \\ W^{m,p}_{loc}(\Omega) &:= \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) \colon D^\alpha f \in L^p_{loc}(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \leq m \right\}. \end{aligned}$$

Il nostro obiettivo è dimostrare il seguente teorema di inclusione.

**Teorema 106** (Sobolev). *Siano $r, n, m \in \mathbb{N}$ con $r < m - \frac{n}{2}$. Allora*[1] *$W^{m,2}(\mathbb{R}^n) \subset C^r(\mathbb{R}^n)$ e per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $W^{m,2}_{loc}(\Omega) \subset C^r(\Omega)$.*

**Lemma 107.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che per ogni $j = 1, \dots, n$ si abbia $x_j \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\mathcal{F}[f] \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e la derivata puntuale di $\mathcal{F}[f]$ coincide con (ovvero: rappresenta) la derivata distribuzionale.*

*Dimostrazione.* Visto che $f \in L^1$ sappiamo che la trasformata di Fourier di $f$ esiste (ed è in $C_0$). Ripetiamo la dimostrazione della formula $D^\alpha \mathcal{F}[f] = -i\mathcal{F}[x^\alpha \cdot f]$. La derivata parziale di $h \mapsto \mathcal{F}[f](h)$ in un punto $h$ nella direzione $e_j$ è definita come il limite per $\varepsilon \to 0$ del seguente rapporto incrementale:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{F}[f](h+\varepsilon e_j) - \mathcal{F}[f](h)}{\varepsilon} &= \frac{\int \left( f(x) e^{-i(h+\varepsilon e_j, x)} - f(x) e^{-i(h,x)} \right) dx}{\varepsilon} \\ &= \int x_j f(x) e^{-i(h,x)} \frac{e^{-i\varepsilon x_j} - 1}{\varepsilon x_j}\, dx.\end{aligned}$$

1 L'inclusione è intesa sulle distribuzioni associate alle funzioni: la distribuzione associata ad una funzione nel primo spazio si può rappresentare tramite una funzione nel secondo spazio; dunque ogni funzione nel primo spazio coincide, salvo un insieme di misura nulla, con una funzione del secondo spazio.

Osserviamo ora che $(e^{-i\varepsilon x_j} - 1)/(\varepsilon x_j)$ tende a $-i$ per $\varepsilon \to 0$ e che, per il teorema di Lagrange, tale quantità è uniformemente limitata in $\varepsilon$. Dunque possiamo applicare il teorema di Lebesgue della convergenza dominata per scambiare il limite per $\varepsilon \to 0$ con l'integrale. Si ottiene dunque:

$$D_j\mathcal{F}[f](h) = -i \int x_j f(x) e^{-i(h,x)}\, dx = -i\mathcal{F}[x_j \cdot f](h).$$

Dunque $\mathcal{F}[f]$ è derivabile e la sua derivata è la trasformata di Fourier di una funzione $L^1$ e quindi è una funzione continua. □

**Teorema 108.** *Sia $f$ una funzione e sia $r \in \mathbb{N}$ tale che $(1+|x|)^r \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $\mathcal{F}[f] \in C_0^r(\mathbb{R}^n)$.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che l'ipotesi garantisce che $x^\alpha \cdot f \in L^1$ per ogni $|\alpha| \le r$. Se $r = 0$ già sappiamo che $\mathcal{F}$ manda $L^1$ in $C_0$. Si procede quindi per induzione: supponendo di sapere che $f \in C^k$ con $k < r$ e che $D^\alpha\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-ix)^\alpha f]$ per ogni $|\alpha| \le k$ si applica il lemma precedente alla funzione $(-ix)^\alpha \cdot f$ e si ottiene quindi che $f \in C^{k+1}$. □

**Lemma 109.** *Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha*

$$(1+|x|)^{2m} \le 2^m(1+n)^m(1+|x_1|^{2m} + \cdots + |x_n|^{2m}).$$

*Dimostrazione.* Sia $|x_k| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Allora $|x|^2 \le n|x_k|^2$ e quindi

$$(1+|x|)^{2m} \le (1+\sqrt{n}|x_k|)^{2m}.$$

Sfruttando la disuguaglianza $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ si ha

$$(1+\sqrt{n}|x_k|)^{2m} \le 2^m(1+n|x_k|^2)^m.$$

Sviluppando la potenza del binomio

$$\begin{aligned}(1+n|x_k|^2)^m &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} n^j |x_k|^{2j} \le \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} n^j (1+|x_k|^{2m}) \\ &= (1+n)^m(1+|x_k|^{2m})\end{aligned}$$

da cui si ottiene la stima desiderata. □

Possiamo finalmente concludere la dimostrazione del teorema di Sobolev.

*Dimostrazione teorema 106.* Sia $f \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$. Ricordando che $\mathcal{F}\colon L^2 \to L^2$, passando alle trasformate di Fourier si ottiene che

$$\mathcal{F}[D^\alpha f] = (ix)^\alpha \cdot \mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

In particolare, si avrà $f \in L^2$ e per ogni $j = 1, \dots, n$:

$$\left|x_j\right|^m \mathcal{F}f \in L^2.$$

Osservando ora che vale in generale la stima (dimostrata nel lemma precedente)

$$(1+|x|)^{2m} \le (2n+2)^m(1+x_1^{2m} + \cdots + x_n^{2m})$$

si può concludere anche che

$$(1+|x|)^m \cdot \mathcal{F}[f] \in L^2.$$

Ma allora possiamo utilizzare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per ottenere la seguente stima:

$$\|(1+|x|)^r \mathcal{F}[f]\|_{L^1} \leq \left\|(1+|x|)^{r-m}\right\|_{L^2} \cdot \|(1+|x|)^m \mathcal{F}[f]\|_{L^2}.$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}\left\|(1+|x|)^{r-m}\right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{2r-2m}\, dx \\ &\leq C \int_0^{+\infty} (1+\rho)^{2r-2m} \rho^{n-1}\, d\rho < +\infty\end{aligned}$$

in quanto $n-1-2m+2r < -1$ è equivalente all'ipotesi $r < m - n/2$.

Dunque abbiamo verificato che $(1+|x|)^r \cdot \mathcal{F}f \in L^1$. Applicando dunque il teorema precedente otteniamo che $\mathcal{F}\mathcal{F}\check{f} = f$ sta in $C^r$ come volevamo dimostrare.

Ora se $f \in W^{m,2}_{loc}(\Omega)$ sarà sufficiente mostrare che $f$ è in $C^r(\omega)$ per qualunque aperto $\omega$ con chiusura compatta in $\Omega$. Dato $\omega$ esiste una funzione $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\psi = 1$ su $\omega$ e $\operatorname{spt}\psi \subset \Omega$. La funzione $\tilde{f} = \psi \cdot f$ si può pensare essere definita su tutto $\mathbb{R}^n$ considerando che il prodotto vale 0 al di fuori di $\Omega$. Siano $g_\alpha \in L^2_{loc}(\Omega)$ per $|\alpha| \leq m$ le funzioni che rappresentano le derivate distribuzionali di $f$: $D^\alpha f = g_\alpha$. Si avrà allora per ogni $|\alpha| \leq m$

$$D^\alpha \tilde{f} = D^\alpha(\psi \cdot f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\psi \cdot g_\beta.$$

Dunque $D^\alpha \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ in quanto le funzioni $g_\beta$ sono in $L^2$ sul supporto di $\psi$ mentre $f$ è nulla, insieme a tutte le sue derivate, al di fuori del supporto di $\psi$.

Dunque $\tilde{f} \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ e per quanto dimostrato sopra sappiamo che $\tilde{f} \in C^r$. Ma su $\omega$ le funzioni $f$ e $\tilde{f}$ coincidono, quindi anche $f$ è $C^r$ su $\omega$. Facendo variare $\omega$ su un intorno di ogni punto di $\Omega$ si ottiene $f \in C^r(\Omega)$. □

Per ogni $s \in \mathbb{R}$ consideriamo su $\mathbb{R}^n$ la misura $\mu_s$ definita, per ogni $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n)$, da $\mu_s$

$$\int \varphi(x)\, d\mu_s(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \varphi(x)(1+|x|^2)^s\, dx.$$

Osserviamo che data $f \in L^2(\mu_s)$ risulta che $f \in \mathcal{S}'$. Infatti se $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{S}$ allora si ha

$$|f[\varphi_j]| = \|f \cdot \varphi_j\|_{L^1 \mu_s} \leq \|f\|_{L^2(\mu_s)} \cdot \|\varphi_j\|_{L^2(\mu_s)}$$

e

$$\begin{aligned}\|\varphi_j\|_{L^2(\mu_s)} &= \int |\varphi_j(x)|^2 (1+|x|^2)^s\, dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^{\frac{s+n}{2}} \varphi_j(x)\right|^2 \cdot \int \frac{1}{(1+|x|^2)^n}\, dx \\ &\to 0.\end{aligned}$$

**Definizione 110** (Spazio di Sobolev). *Per $u \in \mathcal{S}'$ definiamo* *Sobolev $H^s$*

$$\|u\|_{H^s} := \|\mathcal{F}[u]\|_{L^2(\mu_s)}.$$

*Denotiamo con $H^s$ lo spazio (chiamato* spazio di Sobolev*) di tutte le $u \in \mathcal{S}'$ tali che $\|u\|_{H^s} < +\infty$.*

*Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, denotiamo invece $H^s_{loc}(\Omega)$ come lo spazio di tutte le distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tali che per ogni $x \in \Omega$ esiste un aperto $U \subset \Omega$ intorno di $x$ ed esiste $\tilde{u} \in H^s$ tale che le restrizioni di $u$ e $\tilde{u}$ su $U$ coincidono.*

Per definizione risulta che $\mathcal{F}\colon H^s \to L^2(\mu_s)$ è una isometria suriettiva. Dunque $H^s$ è uno spazio di Banach isometricamente isomorfo a $L^2(\mu_s)$. Osserviamo inoltre che $L^2(\mu_0) = L^2$ ed essendo $\mathcal{F}\colon L^2 \to L^2$ si ha $H^0 = L^2$.

Chiaramente $\|f\|_{L^2(\mu_s)}$ è crescente in $s$ dunque se $s > t$ si ha $L^2(\mu_s) \subset L^2(\mu_t)$ e $H^s \subset H^t$.

**Teorema 111.** *Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $W^{m,2}(\mathbb{R}^n) = H^m$ e $W^{m,2}_{loc}(\Omega) = H^m_{loc}(\Omega)$.*

*Dimostrazione.* Se $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^m} &= \|\mathcal{F}u\|^2_{L(\mu_m)} = \int |\mathcal{F}[u](x)|^2(1+|x|^2)^m\,dx \\
&\le c\int (1+|x_1|^{2m}+\cdots+|x_n|^{2m})|\mathcal{F}[u](x)|^2\,dx \\
&\le c\left(\|\mathcal{F}u\|^2_{L^2} + \sum_{j=1}^n \left\|x_j^m\mathcal{F}[u]\right\|^2_{L^2}\right) \\
&\le c\left(\|\mathcal{F}u\|^2_{L^2} + \sum_{j=1}^n \left\|\mathcal{F}[D_j^m u]\right\|^2_{L^2}\right) \\
&= c\left(\|u\|^2_{L^2} + \sum_{j=1}^n \left\|D_j^m u\right\|^2_{L^2}\right) < +\infty.
\end{aligned}$$

E dunque $u \in H^m$.

Se invece $u \in H^m$ si ha, per ogni $|\alpha| \le m$,

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha u\|^2_{L^2} &= \|\mathcal{F}[D^\alpha u]\|^2_{L^2} = \int |x^\alpha|^2|\mathcal{F}u(x)|^2\,dx \\
&\le \int (1+|x|^2)^m|\mathcal{F}u(x)|^2\,dx \\
&= \|\mathcal{F}u\|^2_{L^2(\mu_m)} = \|u\|^2_{H^m} < +\infty
\end{aligned}$$

e dunque $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$.

Se $u \in W^{m,2}_{loc}(\Omega)$ allora per ogni $U$ aperto a supporto compatto in $\Omega$ possiamo trovare una funzione $\varphi \in \mathcal{D}$ con supporto contenuto in $\Omega$ e che valga identicamente 1 su $U$. Allora la funzione $\varphi \cdot u$ può essere considerata una funzione definita su tutto $\mathbb{R}^n$. Usando la formula di Leibniz per la derivata di un prodotto, otteniamo che vale una stima del tipo

$$\|D^\alpha(\varphi\cdot u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\sum_{\beta\le\alpha}\left\|D^\beta u\right\|_{L^2(\operatorname{spt}\varphi)}$$

con $C$ costante che dipende da $\varphi$. Dunque $\varphi \cdot u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n) = H^m$. Ripetendo questo al variare di $U$ si ottiene che $u \in H^m_{loc}(\Omega)$.

Viceversa se $u \in H^m_{loc}$ significa che per ogni $U$ aperto a chiusura compatta in $\Omega$ esiste $\tilde{u} \in H^m$ che coincide con $u$ in $U$. Ma allora $\tilde{u} \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $u \in W^{m,2}_{loc}(\Omega)$. □

**Definizione 112.** *Un operatore lineare $L \colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ si dice avere ordine $k$ se per ogni $s \in \mathbb{R}$ e ogni $u \in H^s$ si ha $Lu \in H^{s-k}$. Scriveremo quindi $L \colon H^s \to H^{s-t}$.*

**Teorema 113.** *Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ l'operatore $D^\alpha$ ha ordine $|\alpha|$;*

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{H^s} &= \|x^\alpha \mathcal{F}u\|_{L^2(\mu_s)} \leq \left\| (1+|x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} \mathcal{F}u \right\|_{L^2(\mu_S)} \\ &= \|\mathcal{F}u\|_{L^2(\mu_{s+|\alpha|})} = \|u\|_{H^{s+|\alpha|}}. \end{aligned}$$

o □

**Teorema 114.** *Se $\varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi \in H^s$. Più precisamente l'inclusione vale per ogni $s < -N - n/2$ dove $N$ è l'ordine della distribuzione $\varphi$.*

*Dimostrazione.* Per il teorema 99 sappiamo che $\mathcal{F}\varphi$ soddisfa la stima

$$|\mathcal{F}\varphi|(x) \leq C(1+|x|)^N, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dunque è facile verificare che

$$\|\varphi\|^2_{H^s} \leq C \int (1+|x|)^{2N}(1+|x|^2)^s \, dx$$

è finito se $2N + 2s + n - 1 > -1$. □

**Teorema 115.** *Sia $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $k \in \mathbb{Z}$. L'operatore $F \colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ definito da*

$$F[u] := \check{\mathcal{F}} \left[ g \cdot (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \cdot \mathcal{F}u \right]$$

*è un operatore di ordine $k$.*

*Se, inoltre, anche $1/g \in L^\infty$ allora $F$ è invertibile, l'operatore inverso $F^{-1}$ ha ordine $k$ e vale*

$$F^{-1}(u) := \check{\mathcal{F}} \left[ \frac{1}{g} (1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}} \cdot \mathcal{F}u \right]. \tag{20}$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned} \|f[u]\|^2_{H^{s-k}} &= \left\| g \cdot (1+|x|^2)^{\frac{k}{2}} \cdot \mathcal{F}u \right\|^2_{L^2(\mu_{s-k})} = \|g \cdot \mathcal{F}u\|^2_{L^2(\mu_s)} \\ &\leq \|g\|^2_{L^\infty} \|\mathcal{F}u\|^2_{L^2(\mu_s)} = \|g\|^2_{L^\infty} \|u\|^2_{H^s}. \end{aligned}$$

Dunque se $g \in L^\infty$ allora $F \colon H^s \to H^{s-k}$. Se anche $1/g \in L^\infty$ l'operatore definito dalla (20) risulta essere un operatore di ordine $-k$ e componendo i due operatori si ottiene

$$\begin{aligned} G^{-1}[G[u]] &= \check{\mathcal{F}} \left[ \frac{1}{g} (1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}} \mathcal{F}\check{\mathcal{F}}[g(1+|x|^2)^{-\frac{k}{2}} \mathcal{F}u] \right] \\ &= \check{\mathcal{F}}[\mathcal{F}u] = u. \end{aligned}$$

□

**Teorema 116.** *Se $f \in \mathcal{S}$ e $u \in H^s$ allora $f \cdot u \in H^s$*

*Dimostrazione.* Utilizzeremo la seguente disuguaglianza valida per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, e $s \in \mathbb{R}$:

$$(1 + |x+y|^2)^s \leq 2^{|s|}(1+|x|^2)^s(1+|y|^2)^{|s|}.$$

Per $s = 1$ la disuguaglianza può essere facilmente verificata. Per ottenere il caso $s = -1$ è sufficiente sostituire $x$ con $x - y$ e poi $y$ con $-y$. Il caso generale si ottiene da questi due elevando tutto alla $|s|$. Da tale disuguaglianza si ottiene, per ogni funzione misurabile $h$,

$$\int |h(x-y)|^2 \, d\mu_s(x) \leq 2^{|s|}(1+|y|^2)^{|s|} \int |h|^2(x) \, d\mu_s(x).$$

Ora se $u \in H^s$, $f \in \mathcal{S}$ □

*Dimostrazione.* visto che $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}$ risulta $f \in H^t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}
\|f \cdot u\|^2_{H^s} &= \|\mathcal{F}[f \cdot u]\|^2_{L^2(\mu_s)} = c\|\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[u]\|^2_{L^2(\mu_s)} \\
&= c \int \left| \int \mathcal{F}[f](y)\mathcal{F}[u](x-y) \, dy \right|^2 d\mu_s(x) \\
&= c \int \left| \int \mathcal{F}[f](y)(1+|y|^2)^{\frac{t}{2}} \cdot \mathcal{F}[u](x-y)(1+|y|^2)^{-\frac{t}{2}} \, dy \right|^2 d\mu_s(x) \\
&\leq c\|\mathcal{F}[f]\|^2_{L^2(\mu_t)} \int \int |\mathcal{F}[u]|^2(x-y)(1+|y|^2)^{-t}(1+|x|^2)^s \, dx \, dy
\end{aligned}$$

facendo un cambio di variabile e usando la stima algebrica precedente, si ha

$$\begin{aligned}
\int |\mathcal{F}[u]|^2(x-y)(1+|x|^2)^s \, dx &= \int |\mathcal{F}[u]|^2(x)(1+|x-y|^2)^s \, dx \\
&\leq 2^{|s|}(1+|y|^2)^{|s|} \int |\mathcal{F}[u]|^2(x)(1+|x|^2)^s \, dx \\
&= 2^{|s|}(1+|y|^2)^{|s|} \|u\|_{H^s}
\end{aligned}$$

da cui, continuando le stime precedenti:

$$\|f \cdot u\|^2_{H^s} \leq c\|f\|_{H^t}\|u\|_{H^s} \int (1+|y|^2)^{|s|-t} \, dy.$$

Osserviamo ora che

$$\int (1+|y|^2)^{|s|-t} \, dy < +\infty$$

se si sceglie $t$ sufficientemente grande (precisamente: $t > |s| + n/2$). □

## 5.2 EQUAZIONI ELLITTICHE

Se $u$ è una funzione di due variabili, osserviamo che le due equazioni alle derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$$

hanno proprietà molto diverse per quanto riguarda la regolarità delle soluzioni. Le soluzioni della prima (equazione di Laplace, associata al polinomio $x^2 + y^2$) sono le funzioni armoniche. Sappiamo che le funzioni armoniche sono la parte reale di funzioni olomorfe e quindi sono funzioni analitiche (in particolare di classe $\mathcal{C}^\infty$). La seconda equazione (equazione delle onde, associata al polinomio $x^2 - y^2$) ammette come soluzione qualunque funzione $u(x, y) = f(x + y)$ dove $f$ è sostanzialmente arbitraria.

In effetti se $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è una qualunque distribuzione si può definire la distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tramite

$$u[\varphi] = f\left(t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(s, s+t)\, ds\right).$$

Si verifica che $\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ da cui $u$ risolve in senso distribuzionale l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x_1)^2} - \frac{\partial^2 u}{(\partial x_2)^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0.$$

**Teorema 117** (regolarità ellittica)**.** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo l'operatore*

$$L = \sum_{|\alpha|<N} g_\alpha \cdot (-iD)^\alpha + \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha \cdot (-iD)^\alpha$$

*dove $N \in \mathbb{N}$, $g_\alpha \in \mathcal{E}(\Omega)$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$. Supponiamo che il polinomio omogeneo*

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha x^\alpha$$

*si annulli su $\mathbb{R}^n$ solamente per $x = 0$ (diremo in questo caso che l'operatore $L$ è* ellittico*).*

*Se $v \in H^s_{loc}(\Omega)$ e $u \in D'(\Omega)$ risolve l'equazione*

$$L[u] = v$$

*allora $u \in H^{s+N}_{loc}(\Omega)$.*

*Dimostrazione.* L'idea della dimostrazione è quella di decomporre l'operatore nella forma $L = S + (P - R) + R$ dove $S$ è la parte con le derivate di ordine inferiore a $N$, $P$ è la parte di grado $N$ e $R$ è un operatore che approssima $P$ in modo tale che $P - R$ abbia ordine nullo e $R$ abbia ordine $N$, come $P$ e in più sia invertibile. Allora possiamo scrivere $R[u] = L[u] - S[u] - (P - R)[u]$. Si può allora attuare una procedura di *bootstrap* per aumentare un grado alla volta la regolarità di una soluzione $u$. Infatti se $u \in H^t$ allora $u \in H^{t-N+1}$, $(P - R)u \in H^t$ e $L[u] = v \in H^s$. Dunque finché $t < s + N$ si ottiene che $R[u] \in H^{t-N+1}$. Ma essendo $R$ invertibile e avendo $R^{-1}$ ordine $-N$ si ottiene che $u \in H^{t+1}$.

Per effettuare la dimostrazione localmente, considereremo durante l'iterazione delle funzioni $u_j$ che coincidono con la soluzione $u$ solo in un intorno, sempre più piccolo, di un punto fissato $x_0$.

Fissato un punto $x_0 \in \Omega$ mostreremo che $u$ coincide con una funzione di $H^{s+N}$ in un intorno di $x_0$. Cominciamo con lo scegliere una funzione $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\varphi_0 = 1$ in un intorno di $x_0$. Essendo $\varphi_0 u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, dalle proprietà degli spazi $H^s$ sappiamo esistere un $t \in \mathbb{Z}$ tale che $u_0 := \varphi_0 u \in H^t$. Se fosse $t \geq s + N$ la tesi sarebbe già dimostrata. Possiamo quindi supporre, senza perdita di generalità, che sia $t < s + N$. Posto $k := s + N - t$ risulta che $k$ è la regolarità che ci manca per arrivare alla tesi.

Consideriamo ora delle funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che ogni $\varphi_j$ sia identicamente uguale ad 1 in un intorno di $x_0$ e il supporto di $\varphi_{j+1}$ sia contenuto nell'interno dell'insieme in cui $\varphi_j = 1$. Poniamo poi $u_j := \varphi_j \cdot u$ per $j = 0, 1, \dots, k$. Il nostro obiettivo è dimostrare che $u_k \in H^{s+N}$. Sapendo che $u_0 \in H^t$ sarà sufficiente dimostrare che se $u_j \in H^{t+j}$ e $j < N$ allora $u_{j+1} \in H^{t+j+1}$. Visto che $u_k$ coincide con $u$ in un intorno di $x_0$, la regolarità di $u_k$ determina la regolarità locale di $u$ ed è sufficiente a concludere la dimostrazione.

Sia dunque $j < k$ fissato e supponiamo $u_j \in H^{t+j}$. Chiaramente $u_{j+1} = \varphi_{j+1} \cdot u_j$ in quanto $\varphi_{j+1} \cdot \varphi_j = \varphi_{j+1}$.

Per prima cosa vogliamo mostrare che $L[u_{j+1}] \in H^{t+j-N+1}$.

Consideriamo il seguente operatore:

$$T[w] := L[\varphi_{j+1} \cdot w] - \varphi_{j+1} \cdot L[w].$$

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} D^\alpha(\varphi_{j+1} \cdot w) - \varphi_{j+1} \cdot D^\alpha w &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} \varphi_{j+1}) \cdot D^\beta w - \varphi_{j+1} \cdot D^\alpha w \\ &= \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^{\alpha-\beta} \varphi_{j+1}) \cdot D^\beta w \end{aligned}$$

dunque i termini di grado massimo dell'operatore $L$ vengono cancellati e risulta:

$$T[w] = \sum_{|\alpha| < N} \tilde{g}_\alpha D^\alpha w.$$

dove $\tilde{g}_\alpha$ sono opportune funzioni in $\mathcal{E}(\Omega)$. Ricordando che $D^\alpha$ è un operatore di ordine $\alpha$ e che la moltiplicazione per $g_\alpha$ è un operatore di ordine 0, otteniamo che $T$ è un operatore di ordine (al più) $N - 1$. Osserviamo che essendo $L$ un operatore locale, si ha $\varphi_{j+1} \cdot L[u_j] = \varphi_{j+1} L[u]$ in quanto

$$\varphi_{j+1} \cdot D^\alpha(\varphi_j \cdot u) = \varphi_{j+1} \cdot \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi_j \cdot D^\beta u = \varphi_{j+1} \cdot D^\alpha u$$

essendo $\varphi_{j+1} \cdot D^\beta \varphi_j = 0$ per ogni $\beta \neq 0$ in quanto $\varphi_j = 1$ sul supporto di $\varphi_{j+1}$. Dunque si ha

$$\begin{aligned} T[u_j] &= L[\varphi_{j+1} \cdot u_j] - \varphi_{j+1} \cdot L[u_j] \\ &= L[u_{j+1}] - \varphi_{j+1} \cdot L[u] = L[u_{j+1}] - \varphi_{j+1} \cdot v \end{aligned}$$

da cui

$$L[u_{j+1}] = T[u_j] + \varphi_{j+1} \cdot v.$$

Sappiamo ora, per ipotesi, che $u_j \in H^{t+j}$ dunque essendo $T$ di ordine $N - 1$ abbiamo che $T[u_j] \in H^{t+j-N+1}$. Inoltre $v \in H^s \subset H^{t+j-N+1}$

in quanto abbiamo supposto $j \leq k-1 = s+N-t-1$. Dunque $L[u_{j+1}] \in H^{t+j-N+1}$ come ci siamo prefissi di dimostrare.

Consideriamo ora il polinomio $p$ che definisce la parte principale dell'operatore $L$. Poniamo

$$P(w) := \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha (-iD)^\alpha w = \check{f}[p \cdot \mathcal{F}w]$$
$$S(w) := \sum_{|\alpha|<n} g_\alpha \cdot D^\alpha w$$

cosicché si ha $L = S + P$. Vorremmo ora riuscire ad invertire l'operatore $P$, ma questo non può essere fatto direttamente, dovremo considerare un operatore $R$ che differisca da $P$ per un operatore di ordine 0 e che sia invertibile. Definiamo

$$r(x) := \frac{1+|x|^N}{|x|^N} \cdot p(x)$$
$$R(w) := \check{\mathfrak{F}}[r \cdot \mathcal{F}w].$$

Il polinomio $p$ è omogeneo di grado $N$ e, per ipotesi, non si annulla mai sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$. Su tale compatto assumera quindi, in modulo, valore minimo $c > 0$ e massimo $C \geq c$ e si avrà quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$c|x|^N \leq |p(x)| \leq C|x|^N.$$

Risulta quindi che la funzione $p(x)/|x|^N \in L^\infty$ e anche $|x|^N/p(x) \in L^\infty$. Dunque essendo

$$r(x) = (1+|x|^2)^{\frac{N}{2}} \cdot \frac{1+|x|^N}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}} \cdot \frac{p(x)}{|x|^N}$$

dalle proprietà degli spazi di Sobolev possiamo dedure che $R$ è un operatore di ordine $N$. Inoltre, passando ai reciproci, si osserva che la funzione $r^{-1}$ sta in $L^\infty$ se moltiplicata per $(1+|x|^2)^{-\frac{N}{2}}$ e dunque l'operatore $R$ è invertibile, l'operatore inverso ha ordine $-N$ e può essere definito come segue

$$R^{-1}(w) = \check{f}[r^{-1} \cdot \mathcal{F}w].$$

Osserviamo ora che $r(x) - p(x) = p(x)/|x|^N$ è in $L^\infty$. Dunque l'operatore $R - P$, che soddisfa

$$(R-P)(w) = \check{\mathfrak{F}}[(r-p) \cdot \mathcal{F}w]$$

è un operatore di ordine 0.

Ricapitolando abbiamo scritto $L = S + P = S + (P - R) + R$. Sappiamo per ipotesi che $u_j \in H^{t+j}$ ed essendo $u_{j+1} = \varphi_{j+1} \cdot u = \varphi_{j+1} \cdot u_j$ possiamo affermare che anche $u_{j+1} \in H^{t+j}$. Inoltre abbiamo osservato che $L[u_{j+1}] \in H^{t+j-N+1}$. Ma anche $Su_{j+1}$ sta nello stesso spazio in quanto $S$ ha grado $N-1$ essendo composto da operatori derivata di ordine al massimo $N-1$ moltiplicati per funzioni regolari (che mantengono quindi l'ordine dell'operatore). Abbiamo anche verificato che

$P - R$ ha grado 0 e quindi $(P - R)[u_{j+1}] \in H^{t+j} \subset H^{t+j-N+1}$. Dunque abbiamo

$$Ru_{j+1} = (L - S - (P - R))[u_{j+1}] \in H^{t+j-N+1}.$$

Visto però che $R$ è invertibile e $R^{-1}$ ha grado $-N$, otteniamo, in conclusione,

$$u_{j+1} = R^{-1}[R[u_{j+1}]] \in H^{t+j+1}.$$

□

# BIBLIOGRAFIA

[1] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[2] V.S. Vladimirov. *Generalized Funcitons in Mathematical Physics*. 1994.