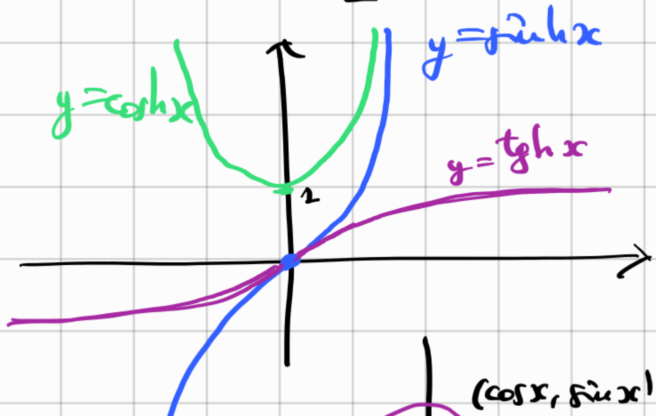
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 49 - 5.2.2024

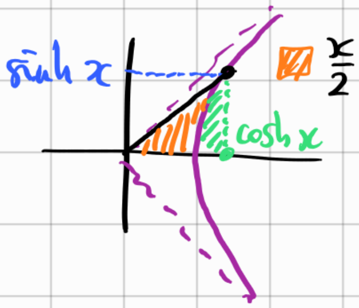
Funzioni iperboliche

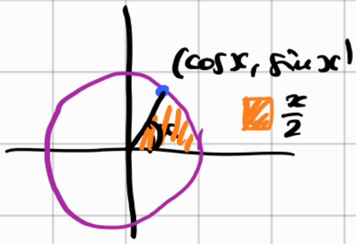
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Proprietà

- sinh è dispari, cosh pari
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$





Usando gli integrali mostrare che l'area arancione è $\frac{x}{2}$

- Formule di addizione:
$$\begin{cases} \cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta \\ \sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \sinh\beta\cosh\alpha \end{cases}$$

- $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente, biettiva

settsinh è la funzione inversa

Scrivere settsinh x mediante $\ln$, $\sqrt{}$

$$\left[\ y = \operatorname{settsinh} x \qquad \sinh y = x \qquad e^y - e^{-y} = 2x \qquad t = e^y \qquad t^2 - 2x\cdot t - 1 = 0 \ \right]$$

eq. II grado

• $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Restringendo:

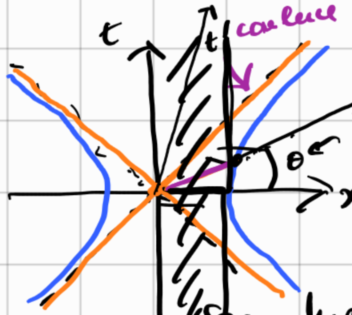
$\widetilde{\cosh} : [0,+\infty) \to [1,+\infty)$ è invertibile

$\text{settcosh} : (1,+\infty) \to [0,+\infty)$ è la funzione inversa.

• Sviluppi in serie: $\begin{cases} \cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{cases}$

• $\text{tgh}\, x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

• Si può usare in relatività



$\text{tgh}\,\theta = v$

se A è simmetrica $(x,y) = {}^t y A x$

$|x|^2 = {}^t x A x$

segnatura di A: $\begin{pmatrix} + & & & 0 \\ & + & & \\ & & - & \\ 0 & & & - \end{pmatrix}$

• Derivate: $\cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh$.

Sono utili nel calcolo degli integrali $\qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\int \sqrt{1+x^2}\, dx \qquad \int \sqrt{x^2-1}\, dx$

$\underbrace{x = \sinh t} \qquad x = \cosh t$

si risolvono con i cambi di variabile

Esempio $\int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx = (*)$

$\cosh^2 t = \underline{1+\sinh^2 t}$

$\frac{x}{\sqrt{2}} = \sinh t$

$x = \sqrt{2}\sinh t$

$dx = \sqrt{2}\cosh t\, dt$

$(*) = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \int \frac{1}{\cancel{\cosh t}} \cancel{\sqrt{2}\cosh t}\, dt$

$= t = \operatorname{settsinh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Integrali che si riconducono a funzioni razionali

Sia $R(t)$ una funzione razionale.

$$\int R(e^{\lambda x})\,dx$$

$$=$$

$$\int \frac{R(t)}{\lambda t}\,dt$$

$t = e^{\lambda x}$

$x = \ln t / \lambda$

$dx = \frac{1}{\lambda t}\,dt$

Esempio $\int \frac{2\sqrt{e^x} + e^{2x}}{e^x - 4}\,dx$

$= \int \frac{2t + t^4}{t^2 - 4} \cdot \frac{2}{t}\,dt$

$t = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$

$dt = \frac{e^{x/2}}{2}\,dx$

$= \frac{t}{2}\,dx$

$= \dots\dots$

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x, \sin x \cos x)\,dx$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \sin x \cos x = \dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

$t = \operatorname{tg} x$

$x = \operatorname{arctg} t$

$dx = \dfrac{1}{1+t^2}\, dt$

$\left(\sin^2 x = 1-\cos^2 x \qquad \sin x \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x \right)$

Esempio

$$\int \frac{1}{\cos x(\sin x+\cos x)}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin x \cos x + \cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{t+1}\, dt = \ln|t+1| = \ln|1+\operatorname{tg} x|$$

$R(\sin x, \cos x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$\begin{cases} \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = 2\dfrac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\underbrace{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad x = 2\operatorname{arctg} t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt}$$

Esempio $\displaystyle \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\frac{t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt$

$$= \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

Integrali con radicali.

$$R(\sqrt[n]{x}) \qquad\qquad t = \sqrt[n]{x} \quad x = t^n \quad dx = n\,t^{n-1}\,dt$$

Esempio: $\displaystyle \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[2]{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx \qquad t = \sqrt[12]{x}$

$$= \int \frac{t^3}{t^6 + t^4} \cdot 12\,t^{11}\,dt = 12 \int \frac{t^{14}}{t^4(t^2+1)}\,dt$$

$$= 12 \int \frac{t^{10}}{1+t^2}\,dt = \ldots\ldots \;\square$$

Funzioni che non hanno una primitiva esprimibile mediante funzioni elementari.

Es $\displaystyle \int e^{-x^2}\,dx$

$\boxed{\text{Teorema Liouville}}$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \leftarrow \text{funzione "speciale"}$$

Analogamente: $\displaystyle \frac{1}{\ln x}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \sin(x^2)$

$$\mathrm{Li}, \quad \mathrm{ei}, \quad \mathrm{Si}, \quad S$$

Vogliamo dare significato a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Per ora, l'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$, si definisce solo se $[a,b]$ è limitato $(a,b\in\mathbb{R})$ e se f è limitata.

Integrali impropri o generalizzati.

• Se $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ $\qquad -\infty<a<b\le+\infty$
è (limitata e) R-integrabile su $[a,\beta]$ $\forall\beta<b$.

$$\int_a^b f = \lim_{\beta\to b^-}\underbrace{\int_a^\beta f}_{\text{integrale usuale.}}$$

__Def__ $f:A\to\mathbb{R}$ si dice "localmente R-integrabile" se f è (limitata e) R-integrabile su ogni $[a,b]\subseteq A$ $\qquad a,b\in\mathbb{R}$.

__Oss__ Se $f:A\to\mathbb{R}$ è continua allora è localmente R-integrabile.

•• Se $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ è loc. R-integrabile

definiamo $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f$.

Se il limite esiste ed è finito diremo che la funzione f è integrabile (in senso improprio) su $[a,b)$ o $(a,b]$. Diremo in questo caso, che l'integrale converge.

Se il limite esiste ma non è finito, diremo che l'integrale diverge.

Se il limite non esiste diremo che l'integrale è indeterminato.

... $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, loc. $\mathcal{R}$-integrabile: scelgo $c\in(a,b)$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^c f + \lim_{\beta\to b^-}\int_c^\beta f .$$

impropri (unilaterali)

Affinché l'integrale esista serve che entrambi i limiti esistano e che la somma sia definita.

(escludo: $+\infty+(-\infty)$ e $(-\infty)+(+\infty)$).

<u>Oss</u> il risultato non dipende da c. (verifica).