5 calcolo integrale

5.1 misura di Peano-Jordan

In questo capitolo vogliamo dare una definizione di *misura* di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ formalizzando le stesse nozioni che sostanzialmente venivano già usate dagli antichi greci. Lo faremo nel caso per noi più rilevante ovvero il caso planare $n = 2$ in cui la *misura* di un insieme si chiama *area*. Ma l'intera costruzione potrebbe essere fatta senza nessuna difficoltà (se non per le notazioni che si complicano) nel caso generale della dimensione n.

Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ vorremmo definire la sua area $m(E) \in \mathbb{R}$ in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. se $E \cap F = \emptyset$ allora $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ (additività);
2. se $E \subseteq F$ allora $m(E) \leq m(F)$ (monotonia);
3. se $E = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ allora $m(E) = |x_2 - x_1| \cdot |y_2 - y_1|$ (normalizzazione).

Andremo a definire la misura m su una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che chiameremo *misurabili* secondo Peano-Jordan. Si potrebbe dimostrare che non è possibile definire m su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ in modo che valgano le proprietà enunciate qui sopra. Sarebbe però possibile definire la misura su una classe molto più amplia di insiemi di quelli che andremo a considerare noi, imponendo l'additività non solo su unioni finite ma anche su unioni numerabili (σ additività). Quello che si otterrebbe è la cosiddetta misura di *Lebesgue* che è ormai una costruzione standard dell'analisi matematica ma richiederebbe una teoria molto più complessa da sviluppare. Ci accontenteremo qui di introdurre la misura m (misura finitamente additiva) di Peano-Jordan che poi ci permetterà di dare significato geometrico all'integrale di Riemann.

rettangolo cartesiano

Diremo che un insieme $R \subseteq \mathbb{R}^2$ è un *rettangolo cartesiano* se R è il prodotto cartesiano di due intervalli limitati cioè

$$R = I \times J$$

con $x_1 = \inf I > -\infty$, $x_2 = \sup I < +\infty$, $y_1 = \inf J > -\infty$, $y_2 = \sup J < +\infty$.

Se $I = [x_1, x_2]$ e $J = [y_1, y_2]$ allora, affinché valga la proprietà di normalizzazione, dovremo porre:

$$m([x_1, x_2] \times [y_1, y_2]) = |x_2 - x_1| \cdot |y_2 - y_1|.$$

Se $I = (x_1, x_2)$ e $J = (y_1, y_2)$ sono intervalli aperti (e limitati) allora per ogni $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < (x_2 - x_1)/2$ e $\varepsilon < (y_2 - y_1)/2$ si ha

$$[x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon] \times [y_1 + \varepsilon, y_2 - \varepsilon] \subseteq (x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \subseteq [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$$

da cui, affinché valga la proprietà di monotonia, si dovrà avere:

$$(x_2 - x_1 - 2\varepsilon) \cdot (y_2 - y_1 - 2\varepsilon) \leq m((x_1, x_2) \times (y_1, y_2)) \leq |x_2 - x_1| \cdot |y_2 - y_1|.$$

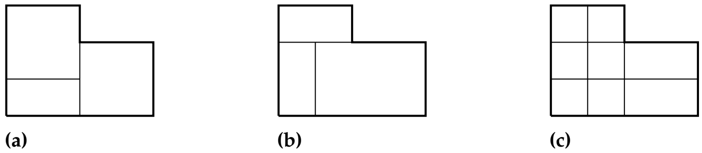


Figura 5.1: Lo stesso polirettangolo si può ottenere come due diverse unioni di rettangoli: (a), (b). Prendendo in considerazione tutte le rette che contengono i lati di tutti i rettangoli coinvolti si ottiene una suddivisione (c) per cui ogni rettangolo in (a) o in (b) è unione di rettangoli in (c).

Ma affinché questo sia vero per ogni $\varepsilon > 0$ si dovrà necessariamente porre:

$$m((x_1, x_2) \times (y_1, y_2)) = |x_2 - x_1| \cdot |y_2 - y_1|.$$

Lo stesso vale se gli intervalli sono semiaperti o comunque se consideriamo qualunque insieme E tale che $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \subseteq E \subseteq [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Dunque l'area di un rettangolo non cambia se aggiungiamo o togliamo punti dai suoi lati.

Se un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ può essere scritto come unione finita di rettangoli disgiunti:

$$E = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_N \qquad R_i \cap R_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

polirettangolo cartesiano

diremo che E è un *polirettangolo cartesiano*. In tal caso per garantire l'additività dell'area porremo:

$$m(E) = m(R_1) + \dots + m(R_N).$$

Affinché questa sia una buona definizione dobbiamo verificare che se A può essere scritto come unione di rettangoli disgiunti in due modi diversi, allora la somma delle misure dei rettangoli dà lo stesso risultato con entrambe le decomposizioni. Questo è intuitivamente ovvio, e dipende dal fatto che date due diverse decomposizioni in rettangoli è possibile considerare una griglia formata da tutte le rette che contengono i lati di ogni rettangolo. Questa griglia identifica una decomposizione in rettangolini che possono essere utilizzati per ricostruire sia l'una che l'altra decomposizione. Ogni rettangolo delle due decomposizioni sarà unione di rettangolini e la sua area sarà la somma delle aree dei rettangolini. Ma visto che le due decomposizioni si suddividono negli stessi rettangolini, le aree definite dalle due decomposizioni devono coincidere.

Per lo stesso motivo risulta chiaro che se E e F sono due polirettangoli anche $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ e $F \setminus E$ sono polirettangoli e risulta

$$m(E \cup F) = m(E \setminus F) + m(E \cap F) + m(F \setminus E). \tag{5.1}$$

Infatti è possibile trovare una famiglia di rettangolini (quelli identificati dalla griglia di tutte le rette contenenti i lati dei rettangoli di E e dei rettangoli di F) che sono tra loro disgiunti e tali che $E \cap F$, $E \setminus F$ e $F \setminus E$ possono essere scritti come unione di questi rettangolini. Questi insiemi sono tra loro disgiunti e quindi, scrivendo l'area di ognuno come la somma delle aree dei rettangoli, si trova (5.1).

Se ora prendiamo un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ qualunque e imponiamo che valga la proprietà di monotonia, dovremo avere che $m(E)$, se è definibile, deve essere l'elemento di separazione tra le misure dei polirettangoli contenuti in E e di quelli contenenti E. Si giustifica quindi la seguente.

Peano-Jordan

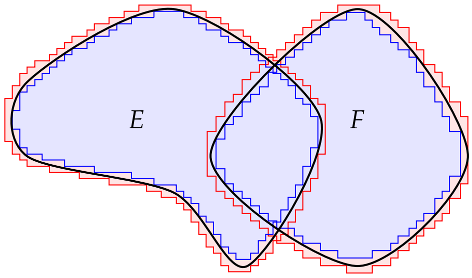


Figura 5.2: Gli insiemi E ed F e i polirettangoli approssimanti dall'interno e dall'esterno. Le approssimanti possono essere scelte in modo che la cornice tra i polirettangoli esterni ed interni abbia area minore di un qualunque $\varepsilon > 0$.

Definizione 5.1 (misura di Peano-Jordan). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato. Definiamo:*

$$m^*(E) = \inf\{m(F) \colon F \supseteq E, F \text{ polirettangolo}\},$$
$$m_*(E) = \sup\{m(F) \colon F \subseteq E, F \text{ polirettangolo}\}.$$

Visto che E è limitato (dunque è contenuto in un rettangolo limitato) si ha $m^*(E) < +\infty$ e visto che $\emptyset \subseteq E$ e $m(\emptyset) = 0$ (l'insieme vuoto $\emptyset = (a, a) \times (c, c)$ è un polirettangolo di area nulla) si ha $m_*(E) \geq 0$. Inoltre $m_*(E) \leq m^*(E)$ in quanto ogni polirettangolo contenuto in E è contenuto, e quindi ha area non superiore, ad ogni polirettangolo contenente E.

misurabile

Se $m^*(E) = m_*(E)$ diciamo che E è misurabile *secondo Peano-Jordan e poniamo $m(E) = m^*(E) = m_*(E)$ la sua misura di Peano-Jordan.*

Teorema 5.2 (proprietà della misura di Peano-Jordan). *Se E e F sono Peano-Jordan misurabili allora anche $E \cup F$, $E \setminus F$, $F \setminus E$, $E \cap F$ sono Peano-Jordan misurabili e risulta*

$$\begin{aligned} m(E \cup F) &= m(E \setminus F) + m(E \cap F) + m(F \setminus E) \\ &= m(E) + m(F) - m(E \cap F). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Osserviamo che un insieme E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono dei polirettangoli E_*, E^* con $E_* \subseteq E \subseteq E^*$ tali che $m(E^*) - m(E_*) < \varepsilon$ (basta utilizzare la caratterizzazione di estremo superiore e inferiore).

Dunque nelle nostre ipotesi per ogni $\varepsilon > 0$ esistono dei polirettangoli E^*, E_*, F^*, F_* tali che

$$E_* \subseteq E \subseteq E^*, \qquad F_* \subseteq F \subseteq F^*$$

con

$$m(E^*) - m(E_*) < \varepsilon, \qquad m(F^*) - m(F_*) < \varepsilon.$$

Possiamo allora approssimare gli insiemi $E \cap F$, $E \cup F$ e $E \setminus F$ dall'interno e dall'esterno con polirettangoli:

$$\begin{aligned} E_* \cap F_* &\subseteq E \cap F \subseteq E^* \cap F^*, \\ E_* \cup F_* &\subseteq E \cup F \subseteq E^* \cup F^*, \\ E_* \setminus F^* &\subseteq E \setminus F \subseteq E^* \setminus F_*. \end{aligned}$$

Le differenze tra gli approssimanti esterni e gli approssimanti interni è sempre contenuta nell'unione delle cornici $\Delta = (E^* \setminus E_*) \cup (F^* \setminus F_*)$ (si faccia riferimento alla figura 5.2):

$$(E^* \cap F^*) \setminus (E_* \cap F_*) \subseteq \Delta$$
$$(E^* \cup F^*) \setminus (E_* \cup F_*) \subseteq \Delta$$
$$(E^* \setminus F_*) \setminus (E_* \setminus F^*) \subseteq \Delta$$

e dunque essendo $m(\Delta) < 2\varepsilon$ ed essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario possiamo concludere che gli insiemi $E \cap F$, $E \cup F$ ed $E \setminus F$ sono misurabili. Con le stesse considerazioni si può facilmente verificare che l'unione dei polirettangoli disgiunti $E_* \setminus F^*$ e $E_* \cap F_*$ differisce dal polirettangolo E_* per un insieme di misura minore di ε e dunque, passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene:

$$m(E \setminus F) + m(E \cap F) = m(E).$$

Invertendo i ruoli di E ed F si ottiene che anche $F \setminus E$ è misurabile e vale la relazione analoga. Con considerazioni del tutto simili si ottiene

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F \setminus E).$$

Di conseguenza si ottengono le uguaglianze enunciate nel teorema. □

Teorema 5.3 (elemento d'area di una trasformazione lineare)**.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una trasformazione lineare affine:*

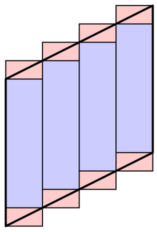
$$L(x, y) = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

con M matrice 2×2 e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Allora se E è misurabile secondo Peano-Jordan anche $L(E)$ lo è. E in tal caso si ha

$$m(L(E)) = |\det M| \cdot m(E). \tag{5.2}$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che è sufficiente verificare quello che succede nel caso in cui E sia un rettangolo cartesiano. Infatti un generico insieme misurabile E può essere approssimato, per ogni $\varepsilon > 0$ con polirettangoli $E^\pm$ con $E^- \subseteq E \subseteq E^+$ e $m(E^+) - m(E^-) < \varepsilon$. Supponiamo che R_k^+, per $k = 1, \dots, N^+$ siano i rettangoli che compongono E^+ e R_k^-, per $k = 1, \dots, N^-$ siano i rettangoli che compongono E^-. Se sappiamo che la trasformazione L manda rettangoli in insiemi misurabili e se sappiamo che sui rettangoli cartesiani vale $m(L(R)) = c \cdot m(R)$, con $c = |\det M|$, allora si deduce che $L(R_k^+)$ può essere approssimato dall'esterno con un polirettangolo F_k^+ in modo che risulti $m(F_k^+) - m(L(R_k^+)) < \varepsilon/N^+$ mentre $L(R_k^-)$ può essere approssimato dall'interno con un polirettangolo F_k^- in modo che si abbia $m(L(R_k^-)) - m(F_k^-) < \varepsilon/N^-$. Facendo l'unione $F^+ = F_1^+ \cup \dots \cup F_{N^+}^+$ e $F^- = F_1^- \cup \dots \cup F_{N^-}^-$ si ottengono dei polirettangoli tali che $F^- \subseteq L(E) \subseteq F^+$ e $m(F^+) - m(F^-) < (c \cdot m(E^+) + \varepsilon) - (c \cdot m(E^-) - \varepsilon) < (c + 2)\varepsilon$. Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario si deduce che $L(E)$ è misurabile e $m(L(E)) = c \cdot m(E)$.

Passo 1. Supponiamo che sia $L(x, y) = (\lambda x, \mu y)$ (una trasformazione lineare diagonale). Se E è un rettangolo $E = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ allora se $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ si ha $L(E) = [\lambda x_1, \lambda x_2] \times [\mu y_1, \mu y_2]$ e chiaramente $m(L(E)) = \lambda(x_2 - x_1)\mu(y_2 - y_1) = \lambda\mu m(E)$. Visto che $\det L = \lambda\mu$ abbiamo ottenuto il risultato voluto. Se λ o μ hanno segno



zione di un pa-
olirettangoli car-

negativo gli estremi degli intervalli si possono scambiare e in tal caso si ottiene $m(L(E)) = |\lambda||x_2 - x_1| \cdot |\mu| \cdot |y_2 - y_1|$ e quindi, come voluto, $m(L(E)) = |\det L| \cdot m(E)$.

Una eventuale componente di traslazione (x_0, y_0) non ha nessuna rilevanza e non la considereremo mai nel seguito in quanto i rettangoli traslati mantengono la stessa misura.

Passo 2. Supponiamo che sia $L(x, y) = (y, x)$ (la riflessione rispetto alla retta $y = x$). Questa trasformazione ha matrice associata $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha determinante -1. Analiticamente scambia tra loro le coordinate x ed y. E' quindi immediato verificare che i rettangoli vengono mandati in rettangoli con base e altezza scambiata e dunque la misura di Peano-Jordan (e la misurabilità) rimangono invariate. Dunque il teorema è banalmente valido in questo caso.

Passo 3. Supponiamo che sia $E = [a, b] \times [c, d]$ e $L(x, v) = (x, rx + v)$ con $r \in \mathbb{R}$ fissato (stiamo utilizzando le coordinate (x, v) nel dominio di L e le coordianate (x, y) nel codominio). Allora

$$L(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a, b], rx + c \le y \le rx + d\}$$

è un parallelogramma. Supponiamo per fissare le idee che sia $r \ge 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ posso affettare l'insieme $L(E)$ con le rette verticali $x_k = a + \frac{r}{n}(b - a)$ e posso identificare i rettangoli, per $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} R^-_{k,n} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [x_{k-1}, x_k), y \in [rx_k + c, rx_{k-1} + d]\}, \\ R^+_{k,n} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [x_{k-1}, x_k), y \in [rx_{k-1} + c, rx_k + d]\}. \end{aligned}$$

e i polirettangoli ottenuti mettendo insieme questi rettangoli:

$$\begin{aligned} P^-_n &= R^-_{1,n} \cup R^-_{2,n} \cup \dots \cup R^-_{n,n}, \\ P^+_n &= R^+_{1,n} \cup R^+_{2,n} \cup \dots \cup R^+_{n,n}. \end{aligned}$$

Per come li abbiamo costruiti si osserva che

$$P^-_n \subseteq L(A) \subseteq P^+_n.$$

Ma è facile calcolare le misure di questi polirettangoli:

$$\begin{aligned} m(P^-_n) &= \sum_{k=1}^n m(R^-_{k,n}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot (d - c - r(x_k - x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{b - a}{n} \cdot \left(d - c - \frac{r}{n}\right) = (b - a) \cdot \left(d - c - \frac{r}{n}\right) \end{aligned}$$

$$m(P^+) = \sum_{k=1}^{n} m(R^+_{k,n}) = \cdots = (b-a)\cdot\left(d-c+\frac{r}{n}\right)$$

ma visto che per $n \to +\infty$ si ha $m(P_n^-) \to (b-a)\cdot(d-c)$ e $m(P_n^+) \to (b-a)\cdot(d-c)$ e visto che si ha

$$m(P_n^-) \le m_*(L(A)) \le m^*(L(E)) \le m(P_n^+)$$

otteniamo che $L(E)$ è misurabile e $m(L(E)) = (b-a)\cdot(d-c) = m(E)$. La matrice associata ad L è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}$ e dunque $\det M = 1$. Abbiamo quindi trovato il risultato voluto.

Passo 4. Sia L una qualunque applicazione lineare che si ottiene come composizione delle applicazioni considerate in precedenza: $L = L_n \circ \cdots \circ L_2 \circ L_1$. Allora per quanto già visto sappiamo che se E è un qualunque insieme Peano-Jordan misurabile risulta

$$m(L(E)) = m(L_n(\ldots(L_2(L_1(E)))\ldots)) = |\det L_n|\cdots|\det L_2|\cdot|\det L_1|\cdot m(E)$$

e dunque anche $L(E)$ è Peano-Jordan misurabile e visto che

$$|\det L| = |\det L_n|\cdots|\det L_1|$$

la formula (5.2) è verificata.

Passo 5. Per concludere la dimostrazione è dunque sufficiente verificare che ogni trasformazione lineare si può scrivere come composizione delle trasformazioni già considerate. In generale il teorema può essere formulato in dimensione qualunque (in $\mathbb{R}^n$ invece che $\mathbb{R}^2$) e la dimostrazione procede esattamente nello stesso modo considerando solo trasformazioni che coinvolgono due coordinate. La trasformazione che scambia due coordinate (passo 2) è rappresentata da una matrice che se moltiplicata a sinistra di una matrice generica M ne scambia le righe, se moltiplicata a destra ne scambia le colonne. La trasformazione del passo 3 se applicata a sinistra somma ad una riga il multiplo di un'altra riga, se applicata a destra somma ad una colonna il multiplo di un'altra colonna. Tramite il metodo di riduzione di Gauss (riduzione completa) è possibile trasformare ogni matrice utilizzando solamente queste trasfromazioni in modo da mantenere invariato il modulo del determinante e rendere la matrice diagonale. A quel punto ci siamo ricondotti al passo 1.

Nel caso planare, $n = 2$, possiamo fare esplicitamente la riduzione di Gauss. Supponiamo che la trasformazione lineare L sia associata ad una matrice generica:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

A meno di scambiare righe e colonne possiamo supporre che sia $a \neq 0$ (se tutti gli elementi fossero nulli avremmo $M = 0$ che è già in forma diagonale). Allora aggiungiamo alla seconda riga un multiplo r della prima in modo da annullare il termine b:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c+ra & d+rb \end{pmatrix}$$

scegliendo $r = -\frac{c}{a}$ e ponendo $d' = d + rb$ abbiamo ottenuto la matrice:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Ora osserviamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque possiamo utilizzare anche quest'ultima matrice moltiplicandola a destra:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ar + b \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

dunque scegliendo $r = -\frac{b}{a}$ si ottiene finalmente una matrice diagonale. □

Il teorema precedente ci dice che la misura di un insieme non cambia se l'insieme viene ruotato visto che il determinante delle isometrie è ± 1. Ci dice anche che se dilatiamo un insieme di un fattore λ la sua area viene moltiplicata per λ^2 (o λ^n se fossimo in $\mathbb{R}^n$) in quanto il determinante di λ volte l'identità è λ^n.

L'integrale di Riemann, che andremo a definire nella prossima sezione, ci permetterà di osservare che ogni figura geometrica delimitata dal grafico di una curva sufficientemente regolare risulta essere misurabile secondo Peano-Jordan. Inoltre il calcolo integrale ci permetterà di determinare l'area di tali figure in modo piuttosto semplice.

5.2 integrale di Riemann

Definizione 5.4 (integrale di Riemann)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Un insieme $P \subseteq [a, b]$ si dice essere una* suddivisione di Riemann *dell'intervallo $[a, b]$ se P è un insieme finito tale che $a, b \in P$. In particolare P si potrà scrivere come*

suddivisione di Riemann

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$$

con

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Data una qualunque suddivisione P di $[a, b]$ definiamo rispettivamente le somme superiori *e le* somme inferiori *come*

somme superiori/inferiori

$$S^*(f, P) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup f([x_{k-1}, x_k])$$
$$S_*(f, P) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf f([x_{k-1}, x_k]).$$

Definiamo infine

$$I^*(f) = \inf \{S^*(f, P) : P \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$
$$I_*(f) = \sup \{S_*(f, P) : P \text{ suddivisione di } [a, b]\}.$$