ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 40 - 15.1.2024

Es 9 test settimanale $f(x) = e^{x^4} - \cos(x^3)$

calcolare $f^{(6)}(0)$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^6)$$

Se trovo P polinomio di $\deg P \leq 6$

tale che $f(x) = P(x) + o(x^6)$

Allora $P(x) = \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + \frac{x^8}{2} + o(x^8) = 1 + x^4 + o(x^6)$$

$$\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$$

$$f(x) = (1 + x^4) - \left(1 - \frac{x^6}{2}\right) + o(x^6)$$

$$= \underbrace{x^4 + \frac{x^6}{2}}_{} + o(x^6).$$

↳ P. di Taylor di ordine 6 centrato in 0

$$1 \cdot x^4 + \frac{1}{2} x^6 = \sum_{k=0}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$1 = \frac{f^{IV}(0)}{4!} \qquad \frac{1}{2} = \frac{f^{(6)}(0)}{6!}$$

$$f^{(6)}(0) = \frac{1}{2} \cdot 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$$

Es $f(x) = e^{x^4} - \cos(x^3)$.

Il punto $x_0 = 0$ è un punto stazionario (critico) $f'(0) = 0$.

È un massimo relativo? È un minimo relativo?

$$\boxed{f(x)} = x^4 + \frac{x^6}{2} + o(x^6) \quad \text{per } x \to 0$$

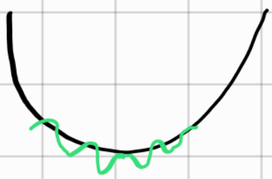
$$= x^4 + o(x^4)$$

$$= \boxed{x^4} \cdot \underbrace{\left(1 + o(1)\right)}_{(*)}$$

è un infinitesimo per $x \to 0$

tende a $1 > 0$ per $x \to 0$.

C'è un intorno di $x_0 = 0$ in cui $(*)$ è positivo.
In tale intorno I $f(x)$ ha lo stesso segno di x^4. $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, se $x \neq 0$, $x \in I$.
Dunque $x_0 = 0$ è un punto di minimo relativo (stretto) in $x = x_0$.



Oss In questo caso era ovvio! se $x \neq 0$

$e^{x^4} > 1 \quad \cos x^3 \leq 1$

$f(x) > 0$ se $x \neq 0$

$f(0) = 0$

Criterio del II ordine per i punti di max/min.

Se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=c>0$ ($<$)
allora x_0 è un minimo locale.
massimo

dim $f(x)=f(x_0)+\frac{c}{2}x^2+o(x^2)$

$$f(x)-f(x_0)=\underbrace{\frac{c}{2}x^2}\underbrace{\left(1+o(1)\right)}_{>0 \text{ in un intorno di } x_0=0}$$

... Così via per ordine superiore ...

Esempio $f(x)=(\sin^2 x)(2-2\cos x)^3$

Trovare il P. di Taylor di ordine 8 per $x\to 0$.

Dire inoltre se $x_0=0$ è max/min locale per f.

$$f(x)=\left(x+o(x)\right)^2\cdot\left(\cancel{2}-2\left(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)^3$$

$$=\left(x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(x^2+o(x^2)\right)^3$$

1
121
1331

$$=\left(x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(x^6+o(x^6)\right)$$

$$=\underbrace{x^8}+o(x^8)=x^8\underbrace{\left(1+o(1)\right)}_{>0}$$ se $x\neq 0$, $x\in I$ >0

x^8 è il P. di Taylor di ordine 8 in $x_0=0$.

$f(x)$ ha un minimo locale (stretto) in $x_0=0$.

Es 7 test settimanale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos(x^7))^5}{x^{14}}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos(x^7) = 1 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{14})$$

$$(\cos(x^7))^5 = \left(1 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{14})\right)^5$$

$$= g\left(-\frac{x^{14}}{2} + o(x^{14})\right)$$

$$g(t) = (1+t)^5$$

$= 1+5t+$
$10t^2+10t^3 \dots$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\boxed{g(t) = g(0) + g'(0)\cdot t + o(t)}$$

$$g'(t) = 5(1+t)^4, \quad g'(0) = 5$$

$$g(t) = 1 + 5t + o(t)$$

$$(\cos(x^7))^5 = g\left(-\frac{x^{14}}{2} + o(x^{14})\right)$$

$$= 1 + 5\left(-\frac{x^{14}}{2} + o(x^{14})\right) + \underbrace{o(x^{14})}$$

$$= 1 - \frac{5}{2}x^{14} + o(x^{14})$$

$$\frac{1-(\cos(x^7))^5}{x^{14}} = \frac{\frac{5}{2}x^{14} + o(x^{14})}{x^{14}} = \frac{5}{2} + \cancel{\frac{o(x^{14})}{x^{14}}}^{\,0} \longrightarrow \frac{5}{2}$$

per $x\to 0$.

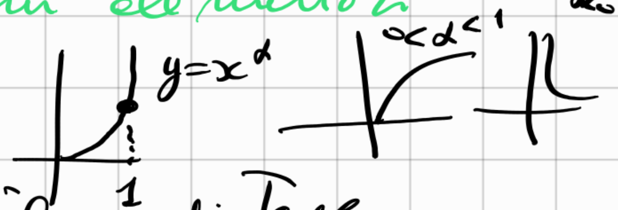
$$\left[\; o\left(-\frac{x^{14}}{2}+o(x^{14})\right) = o\left(-\frac{x^{14}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,o(x^{14}) = o(x^{14}) \;\right]$$

Se $f \sim g \Rightarrow o(f) = o(g)$

$$\left[\; \text{Se } f(x) = ax^n + o(x^n) \Rightarrow f \sim ax^n, \quad a \neq 0 \qquad \frac{f}{ax^n} = 1 + \cancel{\frac{o(x^n)}{ax^n}} \to 0 \;\right]$$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$g(x) = x^\alpha$



Per $x \to 0$ non posso/voglio fare lo sviluppo di Taylor

Faccio lo sviluppo per $x \to 1$.

Ovvero sviluppo per $x \to 0$ la funzione: $\alpha \notin \mathbb{N}$

$f(x) = (1+x)^\alpha$ per $x \to 0$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)}_{2}(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}_{k\text{ fattori}} \cdot (1+x)^{\alpha-k} \qquad f^{(k)}(0) = \overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots}^{k\text{ fattori}}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

Notazione:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \doteq \binom{\alpha}{k}$$

$$\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right]$$

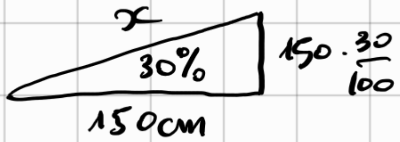
Es $\quad f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad \alpha = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\sqrt{1+x}} = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= \boxed{1 + \frac{1}{2}\cdot x} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Es



$$x = \sqrt{(150\,cm)^2 + (45\,cm)^2} = 150\,cm\sqrt{1+\left(\frac{45}{150}\right)^2}$$

$\sqrt{1+\left(\frac{3}{10}\right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{9}{100}$ $\Leftarrow$ Se volessi stimare l'errore userei il resto di Lagrange

---

Es $\quad \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \binom{-1}{2}x^2 + \binom{-1}{3}x^3 + o(x^3)$

$$= 1 - x + \frac{(-1)\cdot(-2)}{2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Oss $\quad \dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$

ES $\quad f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$x \to 0$

Se P è il pol. di Taylor di ordine n per $f(x) = \ln(1+x)$

allora P' è il pol. di Taylor di ordine $\underline{n-1}$ per $f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$P'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

antiderivata:

$$P(x) = \cancel{a_0} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

$\uparrow$

$f(0) = 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

[Sapendo che $\ln$ è analitica:

$$\ln(1+x) = \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}} \quad \text{per } -1 < x < 1$$

per $x = -1$ diverge

Per $x = 1$ per il Lemma di Abel $\ln 2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$]

Per casa Sviluppare $\operatorname{tg} x$ fino all'ordine 5.

Idea $\quad \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot (\cos x)^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)^{-1}$

Oppure più banalmente

$$f(x) = tg\, x$$
$$f'(x) = 1 + tg^2 x$$
$$f''(x) = 2tg\,(1+tg^2)$$
$$\vdots$$
$$f^{V}(x) = ?$$

Per casa $f = \arctan x$ $\quad f' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$

$f = \arcsin x \quad f' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Es. 3 test settimanale $\sin(0{,}3)$ $\quad n = 4$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + 0\cdot x^4 + \frac{\cos(y)}{5!} x^5 \qquad y \in (0, x)$$

$$\cos y \leq 1$$

$$\sin 0.3 = \frac{3}{10} - \frac{1}{6}\frac{27}{100} \pm \frac{3^5}{120\cdot 10^5} \qquad \frac{27:6}{30} = 4{,}5$$

$$= 0{,}3 - 0{,}0045 \pm \frac{9^2}{40\cdot 10^5} = 0{,}2955 \pm \frac{1}{4} 10^{-4}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}3000 \\ 0{,}0045 \\ \hline 0{,}2955 \end{array}$$

$$(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$e^{x\ln(1+x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) + $$
$$+ \cancel{\frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right)^2} + \cancel{o(x^4)}$$
$$= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

P. di Taylor

$$f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$$

vera per la formula di Taylor.

⚠ MA non è vero che $\left(o(x^n)\right)' = o(x^{n-1})$