ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 37 - 8.1.2024

Es 1 test settimanale

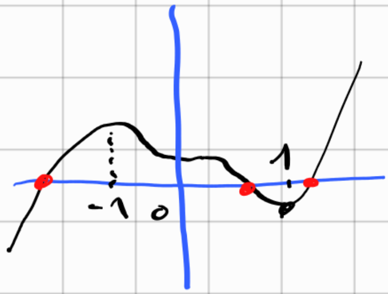
$$13x^{17}+1 = 17x^{13}$$

$$f(x) = 13x^{17} - 17x^{13} + 1$$

$$f'(x) = 13\cdot 17\, x^{16} - 13\cdot 17\, x^{12}$$

$$= 13\cdot 17\, x^{12}\left(x^4-1\right)$$

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max rel	$\searrow$	flesso orizz.	$\searrow$	min rel	$\nearrow$



$$f(1) = 13 - 17 + 1 < 0$$

Esercizio 3

$$x \operatorname{arctg} x = 1 + \ln\sqrt{1+x^2}$$

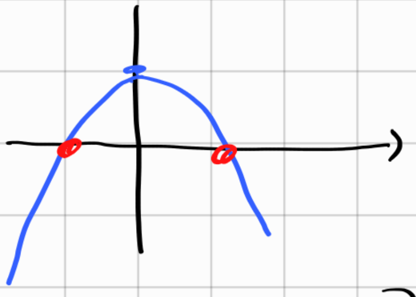
$$f(x) = 1 + \ln\sqrt{1+x^2} - x \operatorname{arctg} x$$

$$f'(x) = \frac{x}{\cancel{\sqrt{1+x^2}}\,\sqrt{1+x^2}} - \operatorname{arctg} x - \cancel{x\cdot\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= -\operatorname{arctg} x$$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$f(0) = 1$$



[Nota: f è pari]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

POLINOMIO DI TAYLOR

$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$

ES $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{6}$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x - \sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \dots}{x - \underbrace{\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \dots}{\cancel{x} - \left[\cancel{x} - \underbrace{x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}} + \dots\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \dots}{\frac{2}{3}x^3 + \dots} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

COME SI GIUSTIFICA?

Def Il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 per la funzione f è

f derivabile n-volte in x_0.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= \underset{k=0}{f(x_0)} + \underset{k=1}{f'(x_0)\cdot(x-x_0)} + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

ES. $f(x)=\sin x$, $x_0=0$, $n=5$

$$P(x)=\cancel{\sin(0)}+\cos(0)\cdot x+\frac{(-\cancel{\sin(0)})}{2}\cdot x^2+\frac{(-\cos(0))}{3!}x^3+$$
$$+\frac{\cancel{\sin(0)}}{\cancel{4!}}x^4+\frac{\cos(0)}{5!}x^5.$$

$$=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

ES $f(x)=\cos x$, $x_0=0$, $n=2$

$$P(x)=\cos(0)+(-\cancel{\sin(0)})\cdot x+\frac{(-\cos(0))}{2}x^2$$
$$=1-\frac{x^2}{2}.$$

Teorema (caratterizzazione del P. di Taylor).

Il polinomio di Taylor centrato in x_0 di ordine n per la funzione f è l'unico polinomio P di grado non superiore a n tale che:

$$\left\{ P^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0) \right. \quad \text{per } k=0,1,\dots,n.$$

dim

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

$$P(x_0)=a_0=f(x_0)$$

$$P'(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\cdot k\cdot(x-x_0)^{k-1}$$

$$P'(x_0)=1\cdot a_1=f'(x_0)$$

ES 🏠
$P(x)=x^2-1$
$x_0=1$
$P(x)=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2$
Trovare a_0, a_1, a_2.

$$P''(x) = \sum_{k=2}^{n} \underbrace{k(k-1)a_k}(x-x_0)^{k-2}$$

$$p''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = f''(x_0)$$

$$p'''(x) = \sum_{k=3}^{n} \underbrace{k(k-1)(k-2)}_{3 \text{ fattori}} a_k (x-x_0)^{k-3}$$

$$p'''(x_0) = 3!\, a_3 = f'''(x_0)$$

$\vdots$

$$p^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} \underbrace{k(k-1)\cdots(k-j+1)}_{j \text{ fattori}} a_k (x-x_0)^{k-j}$$

$\vdots$

$$p^{(j)}(x_0) = \boxed{j!\, a_j = f^{(j)}(x_0)}$$

$$p^{(n)}(x) = n!\, a_n$$

$$p^{(n+1)}(x) = 0$$

$$p^{(n+2)}(x) = 0$$

$\vdots$

$j = 0, \dots, n \implies$

$$\boxed{a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}}$$

$\uparrow$

$\square$

Es $P(x) = 1 - x + 3x^2$

$$p'(x) = \cancel{0} - 1 + 6x$$

$$p''(x) = \cancel{0} + 6$$

$$p'''(x) = 0$$

$\vdots$

Esercizio $f(x) = x^3 - x + 1$

(a) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$.

risposta $P(x) = f(x)$.

(b) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 1$.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}}$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2.$$

$$= 1 + 2x - 2 + 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 1 + 2x - 2 + 3x^2 - 6x + 3$$

$$= 2 - 4x + 3x^2$$

Osservazione: $x^3 - x + 1 = \underbrace{a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2}_{P(x)} + a_3(x-1)^3$

$t = x - 1$

$x = 1 + t$

$$\frac{0}{0}$$

__Esercizio__ $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

Calcolare il P. di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = e$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \qquad f'(e) = 0$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1)\, 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x}$$

$$f''(e) = \frac{1}{e}$$

$$P(x) = e + \frac{1}{2e}(x-e)^2$$

disegnare il grafico di f e di P