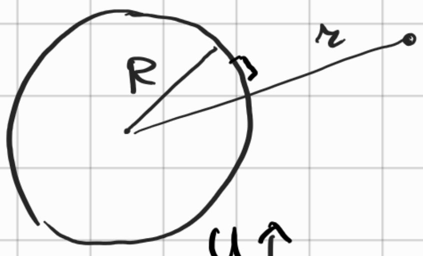
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 29 - 27.11.2023

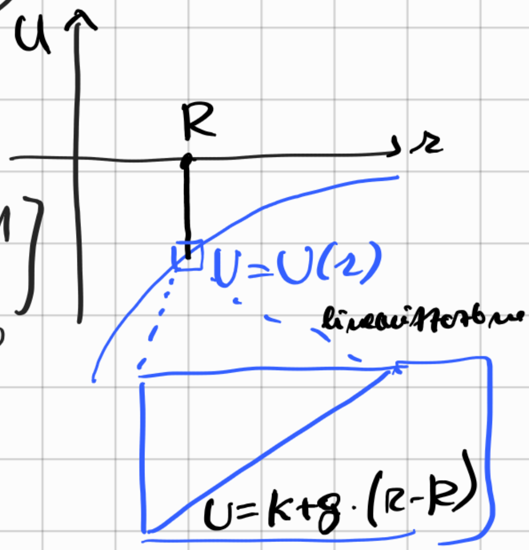
Derivata



Campo gravitazionale

$$U(r) = -\frac{GM}{r}$$

Vicino a $r = R+h$



$$U(R+h) = -\frac{GM}{R+h} = \underbrace{-\frac{GM}{R}}_{k} - \underbrace{\left[\frac{GM}{R+h} - \frac{GM}{R}\right]}$$

$$= k - \left[\frac{GM\cancel{R} - GM(\cancel{R}+h)}{(R+h)R}\right]$$

$$= k + \frac{GM}{R}\frac{h}{R+h} = k + \frac{GM}{R^2}\cdot h + \frac{GM}{R}\left[\frac{h}{R+h} - \frac{h}{R}\right]$$

$$= k + \frac{GM}{R^2}\cdot h + \frac{GM}{R}\,\frac{\cancel{R}h - (\cancel{R}+h)h}{(R+h)R}$$

Sviluppo di Taylor

$$= k + \underbrace{\frac{GM}{R^2}}_{=g}\, h - \underbrace{\frac{GM}{R}\,\frac{h^2}{(R+h)\cdot R}}_{\omega(h)}$$

Resto di Lagrange

$$= k + g\cdot h + \omega(h)$$

pendenza della retta approssimante

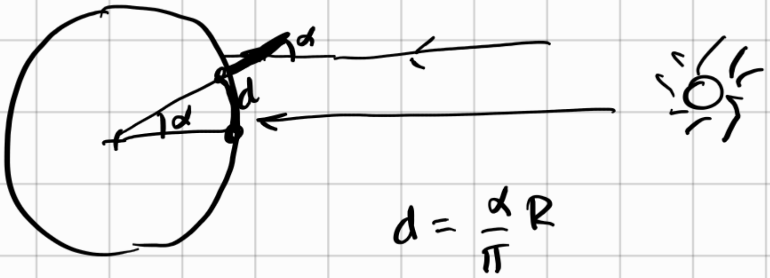
Resto di Peano

$\omega(h) = o(h)$ o-piccolo

$$\boxed{\frac{\omega(h)}{h} \to 0}$$

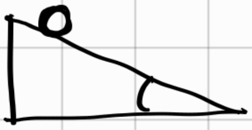
$\omega(h) \ll h$

R:

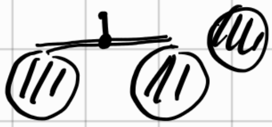


$d = \frac{\alpha}{\pi} R$

g:



G:



M

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$ x_0 punto di accumulazione di A

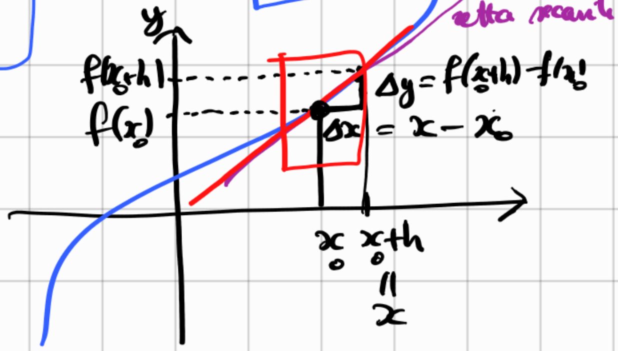
$x = x_0 + h$

Definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} = \lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (*)$$

RAPPORTO INCREMENTALE

derivata di f nel punto x_0



Definizione: la retta di equazione $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$

si chiama retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$

Se il limite (*) esiste ed è finito diremo che f è derivabile nel punto x_0 e chiameremo $f'(x_0)$ la derivata di f nel punto x_0

Diremo che f è derivabile se è derivabile in ogni punto del suo dominio.

<u>Oss</u> Se f è derivabile in x_0:

se $x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0)$$

$$= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)(x - x_0)}$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \omega(x)$$

con $\displaystyle \frac{\omega(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \longrightarrow f'(x_0) - f'(x_0) = 0$

per $x \to x_0$

f è derivabile in x_0 ed ha derivata m in x_0 se e solo se

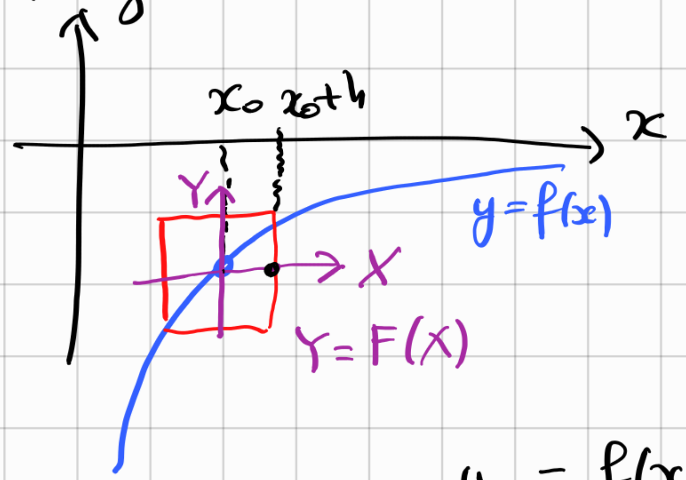
$$(**) \qquad f(x) = f(x_0) + m\cdot(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Infatti se vale (**) $\displaystyle \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0}$

$$\frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \to 0$$

Interpretazione geometrica

La retta tangente è la retta a cui "tende" il grafico della funzione quando "esplodo" il grafico nel punto considerato.



$$y = f(x)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + h \cdot X \\ y = y_0 + h \cdot Y \end{cases}$$

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_0 + h \cdot Y = f(x_0 + h \cdot X)$$

$$Y = \frac{f(x_0 + h \cdot X) - y_0}{h}$$

$$= \boxed{\frac{f(x_0 + h \cdot X) - f(x_0)}{h \cdot X}} \cdot X$$

$$\downarrow \text{ per } h \to 0$$

$$f'(x_0)$$

Al limite $\boxed{Y = f'(x_0) \cdot X}$

Notazioni $\quad f'(x_0) \qquad f'$ è una funzione

$$f' = Df = \frac{d}{dx} f = \frac{df}{dx} \leftarrow \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Esempio $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

se esiste

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad x_0 \neq 0$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\cancel{x_0} - (\cancel{x_0}+h)}{h(x_0+h)x_0} =$$

$$= -\frac{1}{(x_0+h)\cdot x_0} \longrightarrow -\frac{1}{x_0^2} \quad \text{per } h \to 0$$

il limite esiste ed è finito $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ è derivabile

la sua derivata è $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$$D\,\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

Teorema (derivabile $\Rightarrow$ continua)

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

dim

Ipotesi: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow f'(x_0)$ per $x \to x_0$ $\quad (x \neq x_0)$

$$f(x)-f(x_0) = \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \cdot \boxed{(x-x_0)} \to 0.$$

$\Rightarrow f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$ $\qquad \square$.

Tesi

f continua in x_0
$\Updownarrow$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esempi (funzioni continue ma non derivabili)

(1) $f(x) = |x|$ $\qquad x_0 = 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} \begin{cases} \to 1 & \text{per } x \to 0^+ \\ \to -1 & \text{per } x \to 0^- \end{cases}$$

il limite di ↑ non esiste.
dunque f non è derivabile in $x_0 = 0$

Nota $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

è derivabile in tutti gli altri punti perché la derivata, essendo un limite, è locale.

Per $x > 0$ $\quad D|x| = Dx = 1$

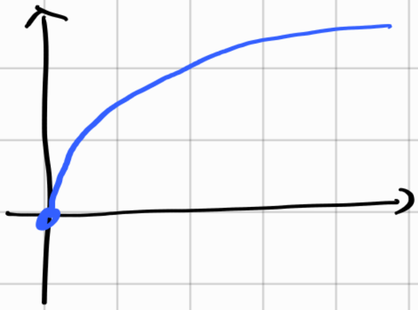
per $x < 0$ $\quad D|x| = D(-x) = -1$

Infatti $\quad D(mx+q) = m$

$\Rightarrow \quad Dc = 0 \qquad c = \text{costante}.$

---

(2) Es $\quad f(x) = \sqrt{x}$



$x_0 = 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x \to 0^+$$

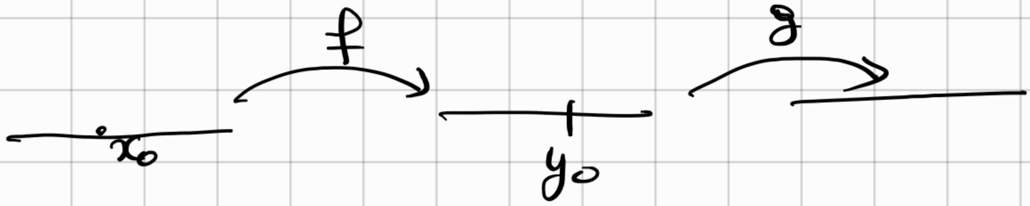
$\sqrt{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

verificare con la definizione che $f(x) = \sqrt{x}$ è derivabile in ogni punto $x \neq 0$.

Teorema (derivata della funzione composta)

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$



$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A \qquad y_0 = f(x_0) \in B$

---

dim sbagliata.

$$\frac{\Delta\, g \circ f}{\Delta x} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} =$$

$y = f(x)$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{x - x_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0}$$

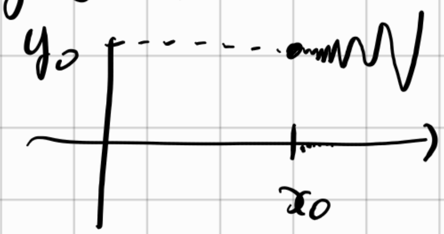
$y \neq y_0$

$$= \boxed{\frac{g(y) - g(y_0)}{\boxed{y - y_0}}} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

anche $y \to y_0$

$\square$

⚠ $y - y_0$ potrebbe annullarsi anche se $x \neq x_0$



dim (vera) circa come prima:

vale $\forall x$ anche se $f(x) = y_0$.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x)) \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{} = (\#)$$

$$G(y) = \begin{cases} \boxed{\dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}} & \text{se } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{se } \underline{y = y_0} \end{cases}$$

$G(y)$ è continua in y_0 perché g è derivabile

$G(f(x)) \to G(f(x_0))$ per $x \to x_0$.

$$(\#) \xrightarrow[x \to x_0]{} G(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad \square$$