ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 25 - 17. 11. 2023

(ver. 2)

Serie numeriche

ES

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 = 0+1+4+9+\dots = +\infty$$

$$\| $$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

definizione somma di una serie

$$\to \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1+q+q^2+q^3+\dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{se } |q|<1$$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{se } q\neq 1.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots = 2$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots}_{} = +\infty$$

SERIE ARMONICA

Teorema Condizione necessaria per la convergenza di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è che $a_k \to 0$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots \quad \text{è convergente ?}$$

Teorema Se $a_k \geq 0$ allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ o converge o diverge (a $+\infty$)

Teorema (confronto) Se $0 \leq a_n \leq b_n$

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-k}$ è telescopica: si trova la somma (sarà 1).

$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2-k}$ $\quad \sum \frac{1}{k^2}$ è convergente.
non sappiamo quanto fa.

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ converge se e solo se $p>1$.

serie armonica generalizzata

criterio di Condensazione
$a_k \geq 0$ $\quad \sum a_k$ ha lo stesso carattere di $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$.

$\sum \frac{1}{k \ln^p k}$?

Confronto asintotico $\quad a_k>0,\ b_k>0$, se $a_k \sim b_k$ $\left(\frac{a_k}{b_k} \to 1\right)$.

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ hanno lo stesso carattere

Se $\quad a_k << b_k$ $\quad$ Se $\sum b_k$ è convergente allora $\sum a_k$ è convergente.

ES $\quad \sum \frac{1}{k\sqrt{k+7}}$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$
è convergente

ES $\quad \sum \frac{n!}{n^n}$ $\quad n! << n^n$
converge!

$\frac{n!}{n^n} \overset{?!}{<<} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n! \, n^2}{n^n} \qquad \text{rapporto: } \frac{\cancel{(n+1)}! \,(n+1)^2 \, n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}} \, \cancel{n!} \, n^2} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

In generale vale il criterio del rapporto anche per leggere:

$a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1$ $\quad \sum a_k$ converge.

Bastava notare che $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \to \frac{1}{e}$

Criterio della radice $\quad a_n \geq 0$

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$
$$= l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

Serie a termini di segno variabile o complessi.

Teorema (convergenza assoluta)

regolare (convergente o divergente)

se $\sum^{\infty} |a_n|$ converge allora anche $\sum^{\infty} a_n$ converge. e $\left|\sum^{\infty} a_n\right| \leq \sum^{\infty} |a_n|$.

a priori potrebbe essere indeterminata.

Nota Se $\sum^{\infty} a_n$ converge e $\sum |a_n|$ diverge $\left(\text{es } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right)$ Allora $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = x.$$

Cosa faccio se $\sum |a_k| = +\infty$? Ma a_k non è a termini positivi.

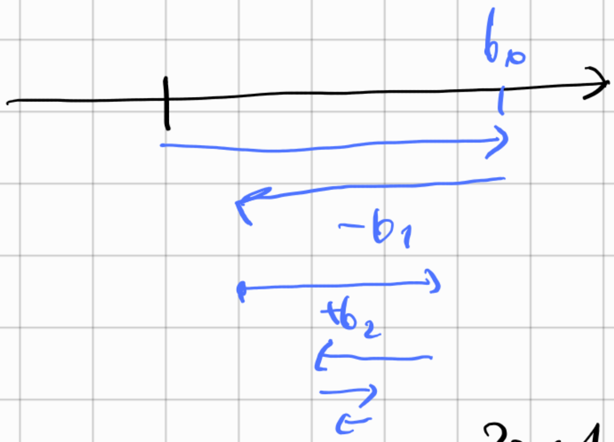
Teorema (criterio di Leibniz) Se $b_k > 0$, b_k decrescente e $b_k \to 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^k b_k}_{a_k} = \underbrace{b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \dots\dots}$$

è convergente.

ES $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k^p}$ $\quad p > 0 \quad$ è convergente.

dim



$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b_k \qquad S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k b_k$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} = S_{2n} - (\underbrace{b_{2n+1} - b_{2n+2}}_{\geq 0})$$

$$\leq S_{2n}$$

S_{2n} è decrescente $\quad S_{2n} \to \ell$

$$S_{2n+1} = \underset{\downarrow \atop \ell}{S_{2n}} - \underset{\downarrow \atop 0}{b_{2n+1}} \to \ell$$

$S_n \to \ell$.

ℓ è finito? $\quad \ell < +\infty$ perché S_{2n} decrescente

S_{2n+1} ma S_{2n+1} è crescente

$\square$ $\quad \Rightarrow \ell > -\infty$. (in realtà $\ell \geq 0$)

ES $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n \ln n}$

ES $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k - \ln k}$

Più in generale cosa faccio se il segno cambia frequentemente ma non è alterno?

ES $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ è convergente?

discreto — continuo

$\sum \longleftrightarrow \int$

$\Delta \longleftrightarrow d$

$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$

$\sum a_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$

SOMMA PER PARTI

dim

a_k, b_k successioni

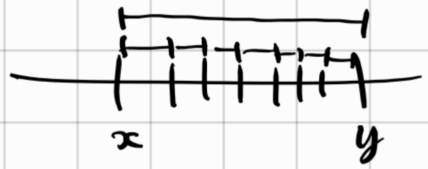
$$A_n = \sum_{k=m}^{n-1} a_k \,,\quad B_n = \sum_{k=m}^{n-1} b_k$$

$$a_n = A_{n+1} - A_n \,,\qquad b_n = B_{n+1} - B_n$$

SOMMA TELESCOPICA

$n > m$

$$A_n B_n - A_m B_m = \sum_{k=m}^{n-1} \left[A_{k+1} B_{k+1} - A_k B_k \right]$$



$$= \sum_{k=m}^{n-1} \left[A_{k+1} B_{k+1} - A_{k+1} B_k + A_{k+1} B_k - A_k B_k \right]$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} A_{k+1} \cdot b_k + \boxed{\sum_{k=m}^{n-1} a_k \cdot B_k}$$

Teorema (Somma per parti) Dati $a_k \cdot B_k$, in $\mathbb{C}$ Posto $A_n = \sum_{k=m}^{n-1} a_n$, $b_n = B_{n+1} - B_n$

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \cdot B_k = A_n B_n - A_m B_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_{k+1} b_k$$

caso particolare $a_k = (-1)^k$ B_k decresc. infinitesimo

$a_k \in \mathbb{C}$
$B_k \in \mathbb{C}$

dim

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot B_k = A_n B_n - A_0 B_0 - \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} \cdot b_k$$

Ipotesi
- A_n limitata $\left(|A_n| \leq L \right)$
- $\sum |b_k|$ convergente

$$\sum |A_{k+1} b_k| \leq L \cdot \sum |b_k| < +\infty$$

- $B_n \to 0$.

Allora $\sum a_k B_k$ è convergente.

Teorema (criterio di Dirichlet)

Esercizio se $a_k = (-1)^k$ e $B_k \geq 0$, B_k decrescente

$B_k \to 0$

allora si applica Dirichlet $\begin{pmatrix} \text{Dirichlet} \\ \Downarrow \\ \text{Leibniz} \end{pmatrix}$

ES $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}}$ $a_k = e^{ikx}$ $B_k = \frac{1}{k}$ $x \in \mathbb{R}$ fissato

limitato

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$$

se $\boxed{e^{ix} \neq 1}$, è limitata

$$|b_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n^2+n}$$

$\sum \frac{1}{n^2+n}$ è convergente

In particolare $\quad \mathrm{Re}\, e^{ikx} = \cos kx$

$$\mathrm{Im}\, e^{ikx} = \sin kx$$

$$\sum_k \frac{\sin(kx)}{k} \quad \text{è convergente} \qquad \square$$