ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 20 - 6.11.2023

Successioni ricorsive

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}}$$

Dati $\alpha \in A$
e $f: A \to A$
$\underline{a}: \mathbb{N} \to A$

↳ successioni ricorsive I ordine, autonome

<u>ES</u> (II ordine)
$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

0 1 1 2 3 5 8 13 21 ....

<u>ES</u> (non autonome)
$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n, n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n! \cdot (n+1) \end{cases}$$

NON FACCIAMO

Esempio (algoritmo di Erone)

Calcolare $\sqrt{p}$, $p > 1$.

<u>Idea</u> approssimo $\sqrt{p}$ con una successione

se $a_n < \sqrt{p}$ allora $\frac{p}{a_n} > \sqrt{p}$

se $a_n > \sqrt{p}$ allora $\frac{p}{a_n} < \sqrt{p}$

$$* \quad \boxed{\begin{cases} a_0 = p \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \end{cases}}$$

ES $p = 2$ $\quad a_0 = 2 \quad a_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$$a_2 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12} \quad \dots$$

Osservazione 1   Se $a_n \to \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$

allora
$$\begin{cases} a_{n+1} \to \ell \\ \quad \shortparallel \\ \dfrac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \to \dfrac{\ell + \frac{p}{\ell}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\ell + \frac{p}{\ell}}{2} = \ell \qquad \ell^2 + p = 2\ell^2 \qquad \ell^2 = p$$

$$\ell = \pm\sqrt{p}.$$

Come dimostro che a_n converge? (in questo caso)

Idea: mostrare che a_n è monotona decrescente e limitata.

⓪ La successione è ben definita? $\forall n: a_n > 0$

Per induzione (i) $a_0 \overset{?}{>} 0$ $a_0 = p > 1 > 0$. ok!

(ii) $a_n > 0 \overset{?}{\Longrightarrow} a_{n+1} > 0$ $a_n > 0$, $\frac{p}{a_n} > 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{a_n + p/a_n}{2}}_{= a_{n+1}} > 0$

① E' decrescente? $a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$

$$\frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \overset{?}{\leq} a_n \iff a_n^2 + p \leq 2a_n^2$$
$$\Updownarrow$$
$$a_n^2 \geq p \iff a_n \geq \sqrt{p}$$

② $a_n \geq \sqrt{p}$?   Per induzione: (i) $a_0 \overset{?}{\geq} \sqrt{p}$, $a_0 = p$ ok se $p > 1$.

(ii) $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \overset{?}{\geq} \sqrt{p}$
$$\Updownarrow$$
$$a_n^2 + p \geq 2\sqrt{p}\, a_n$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n^2 - 2\sqrt{p}\, a_n + p \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_n - \sqrt{p})^2 \geq 0$$ sì! vale ② $\Rightarrow$ vale ①.

① e ② a_n è decrescente $\quad \sqrt{p} \leq a_n \leq p$ e limitata.

a_n è convergente.

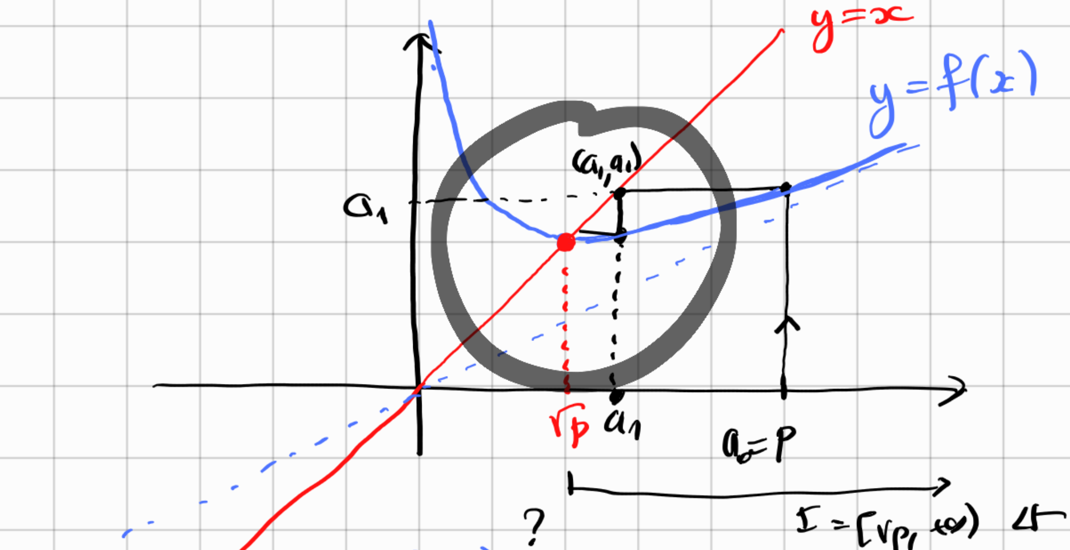
ma allora (osservazione) $a_n \to \pm\sqrt{p}$

ma $a_n > 0 \Rightarrow a_n \to \sqrt{p}$

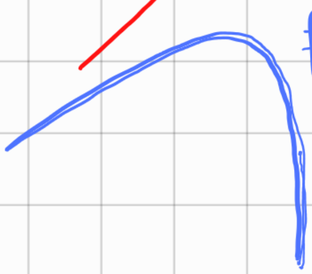
□.

Metodo grafico (diagrammi a ragnatela).

<u>Esempio precedente</u>: $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$ $\qquad \alpha = p$ $\qquad f(x) = \dfrac{x + \frac{p}{x}}{2}$



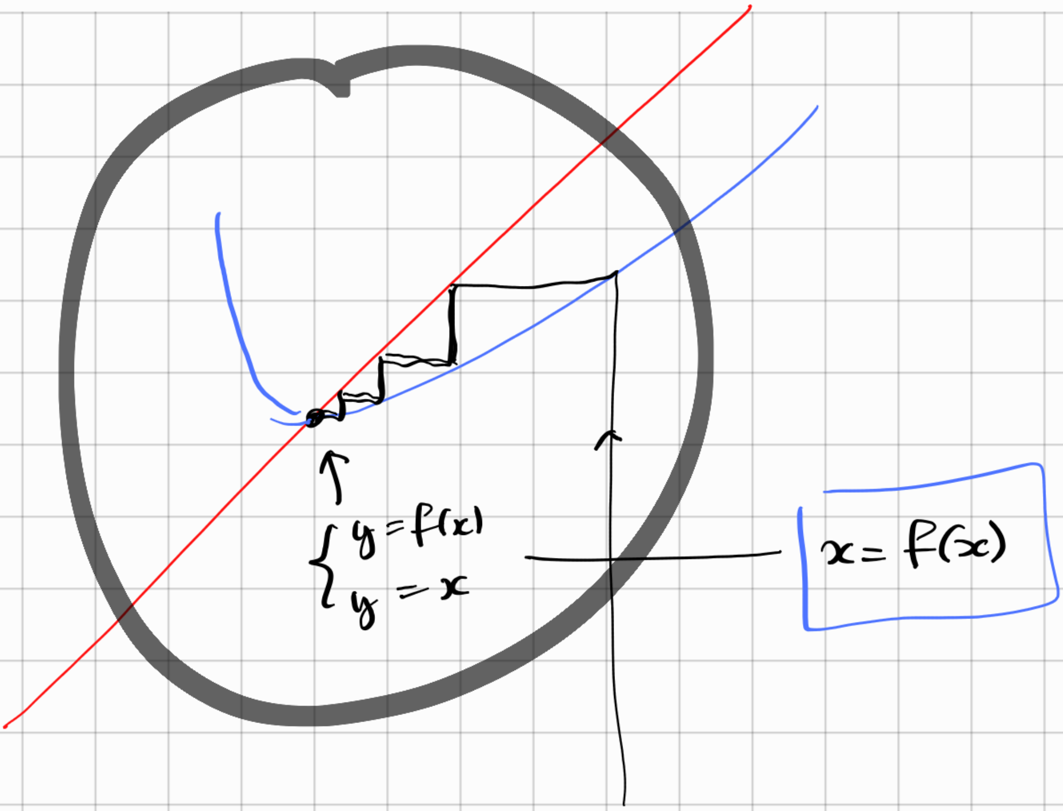
$$f(x) \overset{?}{>} x$$



$$\frac{x + \frac{p}{x}}{2} > x \qquad x^2 + p > 2x^2 \qquad x^2 < p$$

$$-\sqrt{p} < x < \sqrt{p}$$

Si può verificare che $f(x) \geq \sqrt{p}$ per $x > 0$
cioè $\sqrt{p}$ è punto di minimo per f.



def Diremo che x è **punto fisso** di f se vale:

$$f(x)=x.$$

Teorema Se $a_{n+1}=f(a_n)$, $a_n\to l$ e f è continua in l allora l è un punto fisso di f.

dim

$$\begin{tikzcd} a_{n+1} \arrow[d] & = & f(a_n) \arrow[d, "f \text{ è continua in } l"] \\ l & = & f(l) \end{tikzcd}$$

□

Teorema Se $f:A\to A$ e f è crescente su A e se $a_{n+1}=f(a_n)$ allora a_n è monotona.

dim

$a_1 \geq a_0$ è crescente? (1)

$a_1 \leq a_0$ è decrescente?

① $a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n$ per induzione: (i) $a_1 \geq a_0$ ok ①

(ii) $\underbrace{a_{n+1} \geq a_n}_{} \Rightarrow \underbrace{a_{n+2} \geq a_{n+1}}_{}$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+2} & & a_{n+1} \\ \| & & \| \\ f(a_{n+1}) & \geq & f(a_n) \\ & \Uparrow & \leftarrow f \text{ crescente} \\ a_{n+1} & \geq & a_n \end{array}$$

ok

② (ii) $a_{n+1} \leq a_n \overset{f \text{ crescente}}{\Longrightarrow} f(a_{n+1}) \leq f(a_n)$

$$\begin{array}{ccc} f(a_{n+1}) & \leq & f(a_n) \\ \| & & \\ a_{n+2} & \leq & a_{n+1} \end{array}$$

(i) $a_1 \leq a_0$

$\Rightarrow a_n$ decrescente

□

Def Diciamo che l'insieme A è invariante per f se

$$f(A) \subseteq A \qquad \left(\text{ovvero } f|_A : A \to A\right)$$

Nell'esempio (Erone) $f(x) = \dfrac{x + \frac{p}{x}}{2}$

$I = [\sqrt{p}, +\infty)$ è invariante

$f : I \to I$ è crescente

$\Rightarrow a_n$ è monotona.

Teo Sia $f : A \to A$ se $f(x) \leq x \ \forall x \in A$ allora a_n è decrescente

se $f(x) \geq x \ \forall x \in A$ allora a_n è crescente.

Hyp: $a_{n+1} = f(a_n)$

dim $\quad a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n \qquad\qquad a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n.$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$f(x) \geq x \qquad\qquad\qquad f(x) \leq x$$

$\square$

Esercizio

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases} \qquad a_{n+1} = f(a_n)$$

$f(x) = x - x^2$

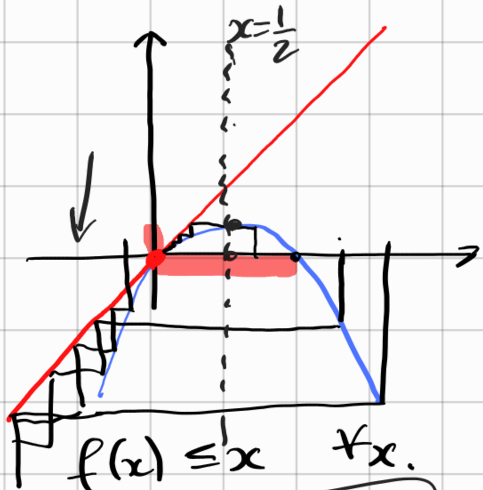
Trovo i punti fissi:

$$\cancel{x} - x^2 = \cancel{x}$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0.$$

unico punto fisso.



$f(x) \leq x \quad \forall x.$

$\boxed{a_n \text{ decrescente}}$ ⓪

Dal diagramma sembra che:

se $\alpha \in [0,1]$ $\quad a_n \to 0$

altrimenti $\quad a_n \to -\infty.$

① $I = [0,1]$ è invariante. $\qquad 0 \leq \alpha \leq 1$

$0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x - x^2 \leq 1 \qquad x - x^2 \leq f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$

$\Uparrow$

$x - x^2 = x(1-x) \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 1$

$\alpha \in [0,1] \implies a_n \in [0,1] \quad \forall n.$ $\qquad$ permanenza del segno

a_n decrescente, limitata $\implies a_n \to \ell \in [0,1]$

$\Downarrow$

$f(x) = x \implies x = 0 \qquad\qquad \ell = 0 \qquad$ ① ok

(2) $J=(-\infty,0)$ è invariante? SÌ

$d<0$

$x<0 \Rightarrow x-x^2<x<0$

$f(x)\le x \Rightarrow a_n$ decrescente $a_n \to \ell\in[-\infty,0)$

a_n è decrescente

se ℓ fosse finito dovrebbe essere un punto fisso: $\ell=0$. che è escluso

$\Rightarrow \ell=-\infty$.

(2) $\square$

(3) Se $a_n>1 \Rightarrow a_{n+1}<0$

$d>1$

$(x>1 \Rightarrow f(x)<0)$

Se $d>1 \Rightarrow a_0=d>1 \quad a_1=f(d)<0$

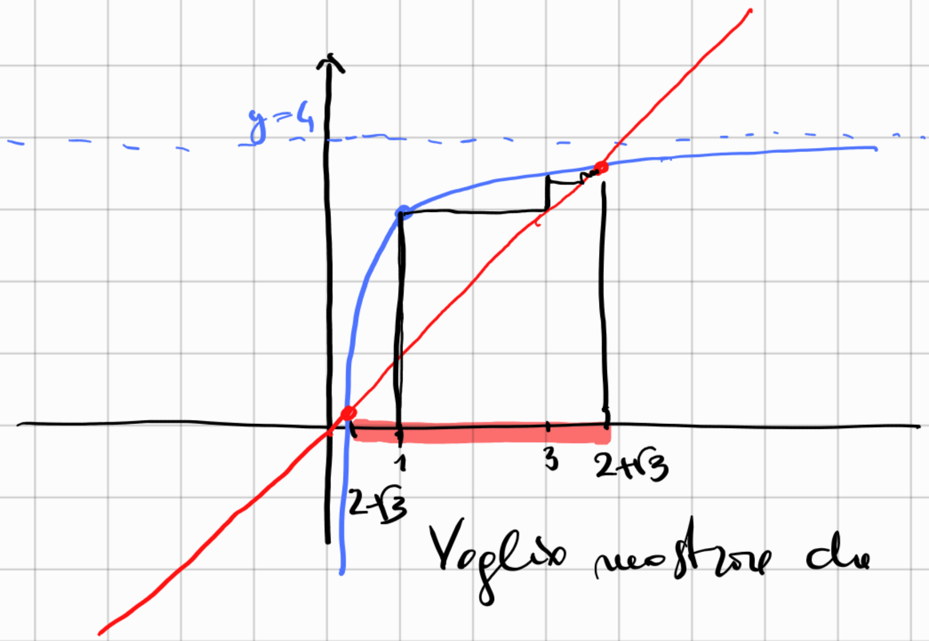
$a_n\in J \quad \forall n\ge 1$.

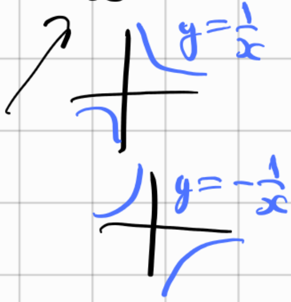
ci riconduciamo al caso (2) $\Rightarrow a_n\to-\infty$.

Esercizio (7.10)

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_{n+1}=4-\dfrac{1}{a_n}\end{cases} \qquad a_{n+1}=f(a_n)$$

$$f(x)=4-\frac{1}{x}.$$





Voglio mostrare che a_n è crescente

$a_n\to 2+\sqrt3$

$f(x)=x \qquad 4-\frac{1}{x}=x \qquad 4x-1=x^2 \qquad x^2-4x+1=0$

$$x_{12}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt3$$

$I = (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$ $\qquad$ f è strettamente crescente su tutto $(0, +\infty)$

$2-\sqrt{3} < x \leq 2+\sqrt{3}$ $\qquad$ $x \in I$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$ ovvero $f(I) \subseteq I$.

$f(2-\sqrt{3}) < f(x) \leq f(2+\sqrt{3})$ ovvero $\qquad$ $f(x) \in I$

$2-\sqrt{3} < f(x) \leq 2+\sqrt{3}$

inoltre $f(x) \geq x$ su I

a_n è crescente, limitata $\Rightarrow a_n \to \ell \in I$

ℓ è un punto fisso, $\ell \in I \Rightarrow \ell = 2+\sqrt{3}$

$\square$