ESISTENZA DI MINIMI IN $W^{1,p}$

$p > 1$ SIA $u_n \in W^{1,p}(I)$ UNA SUCC. TALE CHE

$$\|u_n\|_{W^{1,p}} = \|u_n\|_{L^p} + \|u_n'\|_{L^p} \leq C$$

PER B.A. $\exists\, n_k$ T.C. $u_{n_k} \xrightarrow[k]{} u$ in L^p E $u_{n_k}' \xrightarrow[k]{} v$ in L^p

$$\Rightarrow \forall \varphi \in C^1_c(I) \qquad \int u_{n_k}' \varphi \xrightarrow[k]{} \int v \varphi \qquad \Rightarrow u \in W^{1,p} \text{ E } v = u'.$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$-\int u_{n_k} \varphi' \xrightarrow[k]{} -\int u \varphi'$$

SCRIVIAMO $u_{n_k} \xrightarrow[k]{} u$ IN $W^{1,p}$.

OSS: SI HA ANCHE $u_{n_k} \to u$ UNIF. IN $\bar{I}$.

TEO (ESISTENZA E UNICITÀ)

$p > 1$. $L(x, y, z)$ LAGRANGIANA T.C.

① L DI CARATHEODORY

② $z \to L(x, y, z)$ CONVESSA $(\tilde{\forall} x \text{ e } \forall y)$

③ $L(x, y, z) \geq \alpha |z|^p + \beta$ $\quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad (\tilde{\forall} x \text{ e } \forall y)$

COERCIVITÀ

$\Rightarrow \mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x, u, u')\, dx$ HA MINIMO IN $A = \{ u \in W^{1,p} : u - u_0 \in W_0^{1,p} \}$

DOVE $u_0 \in W^{1,p}$ È T.C. $\mathcal{L}(u_0) < +\infty$.

SE INOLTRE $(y, z) \to L(x, y, z)$ È STRETT. CONVESSA $\tilde{\forall} x$

$(\Rightarrow \mathcal{L}(u)$ È STR. CONVESSA IN $A) \Rightarrow$ IL MINIMO È UNICO.

DIM. SIA u_n UNA SUCC. MINIMIZZANTE,

CIOÈ $\mathcal{L}(u_n) \xrightarrow[n]{} \inf_{A} \mathcal{L}$.

POSSO SUPPORRE $\mathcal{L}(u_n) \leq C = \mathcal{L}(u_0)$.

DALLA COERCIVITÀ OTTENIAMO

$$C \geq \mathcal{L}(u_n) \geq \int_a^b (\alpha |u_n'|^p + \beta) = \alpha \| u_n' \|_{L^p}^p + \beta (b-a)$$

$$\Rightarrow \| u_n' \|_{L^p} \leq \left(\frac{C - \beta(b-a)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \| u_n' - u_0' \|_{L^p} \leq \| u_n' \|_{L^p} + \| u_0' \|_{L^p} \leq C'$$

$$\Rightarrow \| u_n - u_0 \|_{W^{1,p}} = \| u_n - u_0 \|_{L^p} + \| u_n' - u_0' \|_{L^p} \leq C''$$

POINCARÉ

$\Rightarrow \|u_n\|_{W^{1,p}} \leq \|u_n - u_0\|_{W^{1,p}} + \|u_0\|_{W^{1,p}} \leq \overline{C}$.

CIOÈ LE u_n SONO EQUILIM. IN $W^{1,p}$

$\Rightarrow$ $\exists\, n_k$ E $u \in W^{1,p}$ T.C. $u_{n_k} \rightharpoonup u$ IN $W^{1,p}$ E $u_{n_k} \to u$ UNIF.

↑

B.A.

IN PARTICOLARE $u - u_0 \in W_0^{1,p}$ E $u \in A$.

VERIFICHIAMO CHE u È UN MINIMO.

FACCIAMO DUE IPOTESI AGGIUNTIVE SU L, PER SEMPLICITÀ:

(4) $\tilde{\forall} x \quad (y,z) \to L(x,y,z) \in C^1$

E $|L_y| + |L_z| \leq c\left(1 + |y|^{p-1} + |z|^{p-1}\right)$ CON $c > 0$

(5) $\tilde{\forall} x \quad (y,z) \to L(x,y,z)$ CONVESSA

MOSTRIAMO CHE $\mathcal{L}$ È SEMICONTINUA INFERIORMENTE,

CIOÈ $\mathcal{L}(u) \leq \liminf_{k} \mathcal{L}(u_{n_k})$.

PER CONVESSITÀ 5 ABBIAMO LA STIMA

$$\mathcal{L}(u_{n_k}) = \int_a^b L(x, u_{n_k}, u_{n_k}') \, dx \geq \int_a^b \Big[L(x,u,u') + L_y(x,u,u')(u_{n_k} - u) + L_z(x,u,u')(u_{n_k}' - u') \Big] dx$$

CON $u_{n_k} - u \xrightarrow[k]{} 0$ IN $W^{1,p}$.

PER 4 ABBIAMO $L_y(x,u,u')$ E $L_z(x,u,u') \in L^q$ $\left(q = \frac{p}{p-1}\right)$

$$\Rightarrow \inf_{A} \mathcal{L} = \lim_{k} \mathcal{L}(u_{n_k}) \geq \int_a^b L(x,u,u') \, dx = \mathcal{L}(u)$$

CIOÈ u È UN MINIMO.

PER L'UNICITÀ BASTA OSSERVARE CHE, SE $(y,z) \to L(x,y,z)$ È STRETT. CONVESSA $\forall \tilde{x}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{\mathcal{L}(u)+\mathcal{L}(v)}{2} \quad \forall u, v \text{ CON } = \text{ SOLO SE } u=v.$$

$\Rightarrow$ SE u_1 E u_2 SONO MINIMI $\Rightarrow$ $\frac{u_1+u_2}{2} \in \mathcal{A}$ E

$$\mathcal{L}\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \inf \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2.$$

CONTRO ESEMPI:

(1) $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2 + u'^2}\, dx$

$L \in C^1$ E CONVESSA

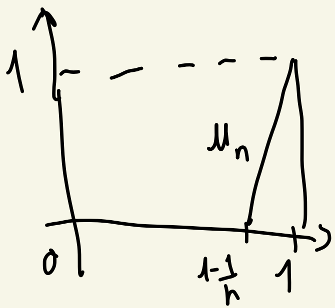
$L(y,z) \geq |z|$

$L(y,z) \cancel{\geq} \alpha |z|^p + \beta$

$\min \left\{ \mathcal{L}(u) : \quad u \in A \right\}$ NON ESISTE

$A = \left\{ u \in W^{1,1} : u - x \in W_0^{1,1}, \text{ CIOÈ } u(0) = 0 \text{ e } u(1) = 1 \right\}$

INFATTI $\forall u \in A \qquad \mathcal{L}(u) > \int_0^1 |u'| \geq \left| \int_0^1 u' \right| = 1$



D'ALTRO CANTO, $u_n = \begin{cases} 0 & x \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right] \\ 1 + n(x-1) & x \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}$

$\mathcal{L}(u_n) = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sqrt{[\underbrace{1 + n(x-1)}_{\leq 1}]^2 + n^2}\, dx \geq \frac{\sqrt{1+n^2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

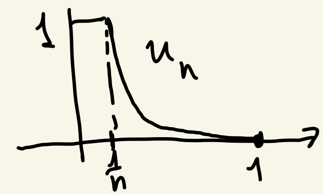
(2) $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 x u'^2 \, dx$ $\quad p=2 \quad$ ma $\quad L(x,z) = x z^2 \cancel{\geq} \alpha |z|^2 + \beta, \quad \alpha > 0$

NON C'È MINIMO IN $\mathcal{A} = \{ u \in W^{1,2} : u(0) = 1, \; u(1) = 0 \}$

INFATTI $\mathcal{L}(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{A}$

INOLTRE $\mathcal{L}(u) = 0 \Rightarrow u' = 0 \Rightarrow u$ COST. $\Rightarrow u \notin \mathcal{A}$

SIA $u_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -\frac{\log x}{\log n} & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$



$$\mathcal{L}(u_n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 x \left(\frac{1}{x (\log n)} \right)^2 dx = \frac{1}{(\log n)^2} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{\log n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \inf_{\mathcal{A}} \mathcal{L} = 0 .$$

③ (BOLZA) $\mathcal{L}(u) = \int_0^1 \left[1-(u')^2\right]^2 + u^2 \quad u \in A = W_0^{1,2}(0,1)$

$\mathcal{L}(u) > 0 \quad \forall u \in A$ INFATTI

$\mathcal{L}(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ E $|u'| = 1$ IMPOSSIBILE.

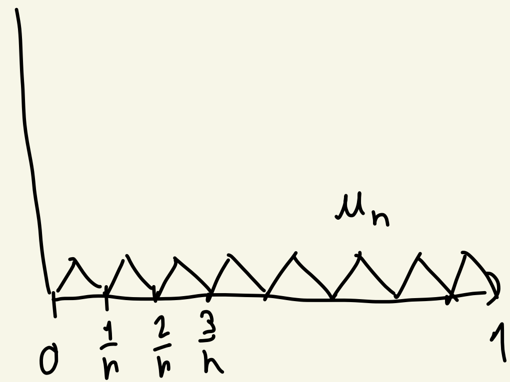
$\exists\, u_n \to 0$ UNIF.

$|u_n'| = 1 \quad \tilde{\forall} x$

$u_n \in W_0^{1,\infty} \subseteq W_0^{1,2}$

$\mathcal{L}(u_n) = \int_0^1 u_n^2 \xrightarrow[n]{} 0$

$\Rightarrow \inf_A \mathcal{L} = 0.$



POSSIAMO METTERE INSIEME IL TEO DI ESIST. IN $W^{1,p}$ COL TEO DI REGOLARITÀ C^1:

TEO SIA $p>1$ E L UNA LAGRANGIANA TALE CHE:

1. L CONT. IN (x,y,z) E C^1 IN (y,z)
2. $|L_y| + |L_z| \leq c(1+|y|^p+|z|^p)$
3. $z \to L(x,y,z)$ STRETTAMENTE CONVESSA
4. $L(x,y,z) \geq \alpha|z|^p + \beta \quad \alpha>0, \beta \in \mathbb{R}$

REGOLARITÀ C^1

ESISTENZA IN $W^{1,p}$

$\Rightarrow \exists$ MIN DI $\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(x,u,u')$ IN $A = \{u \in W^{1,p} : u - u_0 \in W_0^{1,p}\}$ CHE È DI CLASSE C^1 (QUINDI MINIMO TRA LE C^1 A ESTREMI FISSATI).