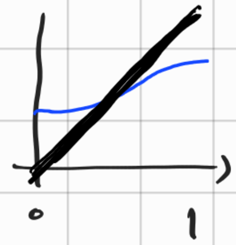
ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 4 - 5.3.2024

Es per casa $\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[|u'(x)|^2 + (u(x)-x)^2\right] dx$

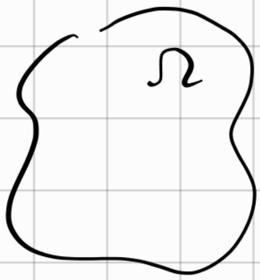


$\mathcal{L}(u) \to \min \qquad u \in C^1([a,b])$

con estremi liberi.

Scrivere l'eq. di E.L. e risolverla

Esempi di funzionali di più variabili



$u : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

$\mathcal{L}(u) \to \min$, condizioni di Dirichlet $u(x) = g(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$

g assegnata.

Se u è un minimo, abbastanza regolare
$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$0 = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}(u+\varepsilon\varphi)\right]_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \left[\frac{d}{d\varepsilon} L(x, u(x)+\varepsilon\varphi(x), \nabla u(x)+\varepsilon\nabla\varphi)\right]_{\varepsilon=0} dx$$

$$L = L(\underline{x}, y, \underline{z}) = L(x_1 \dots x_n, y, z_1 \dots z_n)$$

$$z_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\varphi + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right] dx$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\varphi + \nabla_z L \cdot \nabla\varphi\right] dx = (*)$$

Teo della divergenza: $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} \underline{f} = \int_{\partial\Omega} \underline{f}\cdot \nu_\Omega$

$$\operatorname{div}(g\cdot\underline{f}) = \underline{\nabla} g\cdot \underline{f} + g \operatorname{div}\underline{f}$$

$$\operatorname{div}\underline{f} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

$$\left[\operatorname{div}(g\cdot\underline{f}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(g\cdot f_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_k}\cdot f_k + \sum_{k=1}^{n} g\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_k}\right.$$

$$\left. = \underline{\nabla} g\cdot f + g \operatorname{div} f\right]$$

$$\int_{\partial\Omega} g\cdot\underline{f}\,\nu_\Omega = \int_\Omega \operatorname{div}(g\cdot\underline{f}) = \int_\Omega \nabla g\cdot\underline{f} + \int_\Omega g\cdot\operatorname{div}\underline{f}$$

$$(*) = \int_\Omega\left[\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\varphi - \left(\operatorname{div}_x \nabla_z L\right)\cdot\varphi\right] + \cancel{\int_{\partial\Omega}\varphi\,\nabla_z L\cdot\nu_\Omega}$$

$\nabla u\cdot\nu_\Omega = \dfrac{\partial u}{\partial \nu_\Omega}$

$$= \int_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \operatorname{div}_x\nabla_z L\right)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi\in C_c^\infty(\Omega)$$

E.L.

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y} = \operatorname{div}_x \nabla_z L}$$

significa: $\displaystyle\frac{\partial L}{\partial y}(x, u(x), \nabla u(x)) = \operatorname{div}\left(\nabla_z L(x, u(x), \nabla u(x))\right)$

Integrale di Dirichlet ($\times f \equiv 0$)

$$\mathcal{L}[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \int_\Omega f(x)\cdot u(x)\, dx.$$

$$u \in C^1(\Omega), \quad u(x) = g(x) \text{ su } \partial\Omega.$$

$\mathcal{L}[u] \to \min$

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

con $L(\underline{x}, y, \underline{z}) = \frac{1}{2}|z|^2 + f(x)\cdot y$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = f(x), \quad \nabla_z L = z \qquad \left(\nabla \tfrac{1}{2} z^2 = z\right)$$

E.L. : $\quad f(x) = \operatorname{div} \nabla u(x) = \Delta u(x)$

$$\operatorname{div} \nabla u(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

$\boxed{\Delta u = f}$ Eq. di Poisson.

se $f = 0$ $\boxed{\Delta u = 0}$ Eq. di Laplace.

Se ci ricordiamo del dato al bordo si risolve

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

condizione di Dirichlet

Se non metto condizioni al bordo trovo

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_\Omega} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

condizione di Neumann.

Le equazioni differenziabili che sono equazioni di E.L. di un funzionale $\mathcal{L}$ vengono dette "variazionali".

Per trovare la soluzione posso usare il "metodo diretto del calcolo delle variazioni".

<u>Idea</u>: $\min \mathcal{L}$? $\quad \exists\, u_k \in X \quad \mathcal{L}(u_k) \to \inf \mathcal{L}$

scelgo una topologia su X <u>in modo che</u>:

(i) se $\mathcal{L}(u_k) \le C \Rightarrow u_k \in K$ compatto in X

$(\Leftrightarrow \|u_k\| \le C) \quad u_{k_j} \to u$ in X.

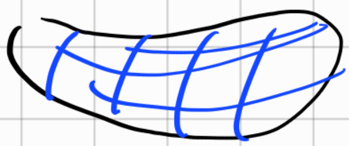
(ii) $\mathcal{L}$ sia semicontinuo inferiormente (sci, lsc)

$$\mathcal{L}(u) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{L}(u_k)$$

Allora $\mathcal{L}(u) \le \inf \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L}(u) = \min \mathcal{L}$.

(iii) se i minimi di a sono abbastanza regolari allora soddisfano EL.

<u>Esempio 2</u> <u>Superfici minime</u>



$$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|Du(x)|^2}\, dx$$

$$L(x,y,z) = \sqrt{1+|z|^2} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \nabla_z L = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

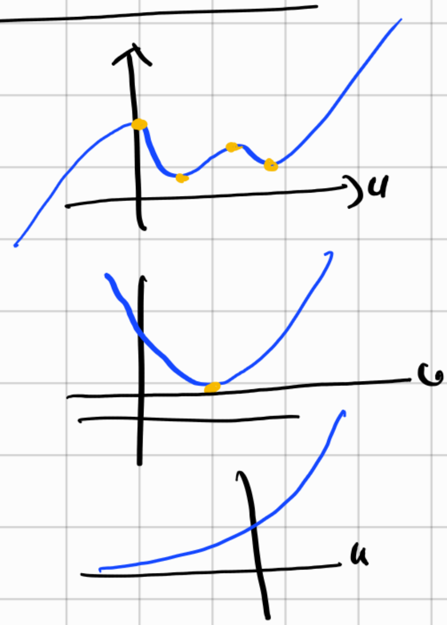
E.L. $\quad \operatorname{div} \nabla_z L = 0$

$$n \cdot H_u(x) = \operatorname{div} \frac{\nabla u(x)}{\sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}} = 0$$

curvatura media = media delle curvature principali.

Le superfici con curvatura media nulla si chiamano superfici minime.

CONVESSITA'



Idea: Se u_0 è un punto critico di $\mathcal{L}$
e se $\mathcal{L}$ è convesso
allora lo spazio tangente in u_0 a $\mathcal{L}$
è orizzontale e $\mathcal{L}(u) \geq \mathcal{L}(u_0)$
per ogni altro u.

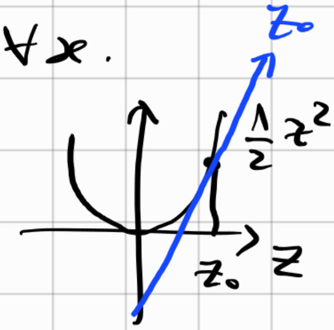
Esempio

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega f\cdot u$$

$$= \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

$$L(x,y,z) = \frac{1}{2} z^2 + f(x)\cdot y.$$

$(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ è convessa $\forall x$.



$$\boxed{\frac{1}{2} z^2 \geq \frac{1}{2} z_0^2 + (z - z_0)\cdot z_0} \quad (*)$$

si può dedurre anche algebricamente

$$\begin{aligned}
0 \leq |z - z_0|^2 &= |z|^2 + |z_0|^2 - 2\, z\cdot z_0 \\
&= |z|^2 - |z_0|^2 - 2\, z\cdot z_0 + 2\, z_0\cdot z_0 \\
&= |z|^2 - |z_0|^2 - 2(z - z_0)\cdot z_0 \\
|z|^2 &\geq |z_0|^2 + 2(z - z_0)\, z_0
\end{aligned}$$

Sia u_0 soluzione di E.L. : $\Delta u_0 = f$

$$\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u_0) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u_0|^2 + \int_\Omega f\cdot(u-u_0)$$

$$\overset{*}{\geq} \int_\Omega (\nabla u - \nabla u_0)\cdot\nabla u_0 + \int_\Omega f\,(u-u_0)$$

$u-u_0 = g-g=0$ su $\partial\Omega$

$$= -\int_\Omega (u-u_0)\,\mathrm{div}\,\nabla u_0 + \int_\Omega f(u-u_0)$$

$$= \int_\Omega \big(\underbrace{\cancel{f - \Delta u_0}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ per E.L.}}}\big)(u-u_0) = 0$$

In generale: $\mathcal{L}(u) = \int_\Omega L(x,u,\nabla u)$

Se u_0 soddisfa $\begin{cases} \mathrm{div}\,\nabla_z L(x,u,\nabla u) = \frac{\partial L}{\partial y} & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$

Se $u \in C^1(\Omega)$, $u=g$ su $\partial\Omega$.

Se $\forall x \in \Omega$ $\quad (y,z) \mapsto L(x,y,z)$ è convessa, dunque:

$$L(x,y,z) - L(x,y_0,z_0) \geq \frac{\partial L}{\partial y}(x,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + \nabla_z L(x,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)$$

$$\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u_0) = \int_\Omega \big(L(x,u,\nabla u) - L(x,u_0,\nabla u_0)\big)dx$$

$$\geq \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial y}(x,u_0,\nabla u_0)\cdot(u-u_0) + \nabla_z L(x,u_0,\nabla u_0)(\nabla u - \nabla u_0)\right]$$

$$= \int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial y}(x, u_0, \nabla u_0) - \operatorname{div} \nabla_z L(x, u_0, \nabla u_0) \right)}_{= 0 \quad (E.L.)} \cdot (u - u_0)$$

$$= 0 \qquad \Rightarrow \mathcal{L}(u) \geq \mathcal{L}(u_0) \qquad \square$$

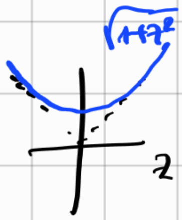
---

ovviamente lo stesso si fa per $u(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ (una variabile).

<u>Es</u> $\mathcal{L}(u) = \int \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{x}}$ Brachistocrona.

$L(x,y,z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{x}}$

è convesso in (y,z).



<u>Es</u> $\mathcal{L}(u) = \int_r^R x\sqrt{1+(u'(x))^2}$, $L(x,y,z) = x\sqrt{1+z^2}$

è convesso in (y,z).

CATENOIDE