ANALISI MATEMATICA
LEZIONE 10 — 31.3.2023

Teorema del Dini

$$S = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : G(\underline{x}) = 0 \}$$

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Se in $\underline{x}^* \in S$ $\quad \nabla G(\underline{x}^*) \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$

Allora $\exists \rho > 0$ t.c. $S \cap B_\rho(x^*)$ è il grafico di una funzione.

Se ad esempio $\frac{\partial G}{\partial x_n} \neq 0$ allora

$$S \cap B_\rho(x^*) \subseteq \{ \underline{x} : x_n = f(x_1 \dots x_{n-1}) \} \quad ⊛$$

Cioè vale: $G(x_1, \dots, x_{n-1}, \underleftarrow{f(x_1 \dots x_{n-1})}) = 0$

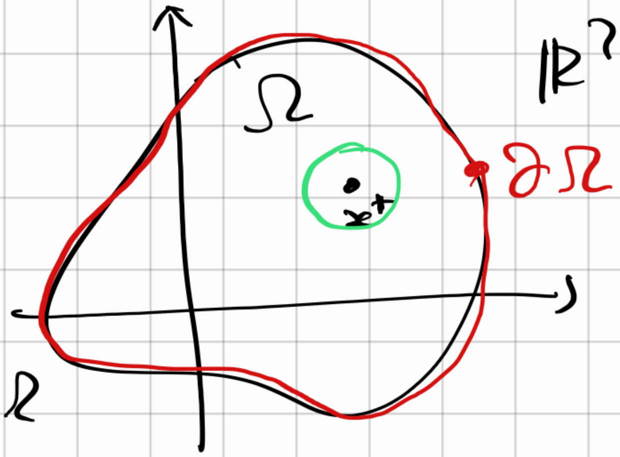
dunque (derivando ⊛ rispetto a x_k)

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} + \frac{\partial G}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

Dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x_k}}{\frac{\partial G}{\partial x_n}}$$

Ci ricordiamo i criteri per identificare un punto di minimo?



$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Se x^* è un max o min relativo o assoluto di f su Ω, x^* punto interno di Ω

(significa che esiste $\rho > 0$ t.c. $B_\rho(x^*) \subseteq \Omega$).

Allora $\nabla f(x^*) = \underline{0}$.

Come faccio a trovare eventuali punti di max o min relativo o assoluto su $\partial\Omega$?

O in generale, su una superficie S?

- Se S è scritta in forma parametrica

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c}\mathbb{R}^m\\ \rotatebox{90}{$\subseteq$}\\ D\end{array} \arrow[r, "\Phi"] & \overset{\subseteq \mathbb{R}^n}{S} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

parametrizzazione

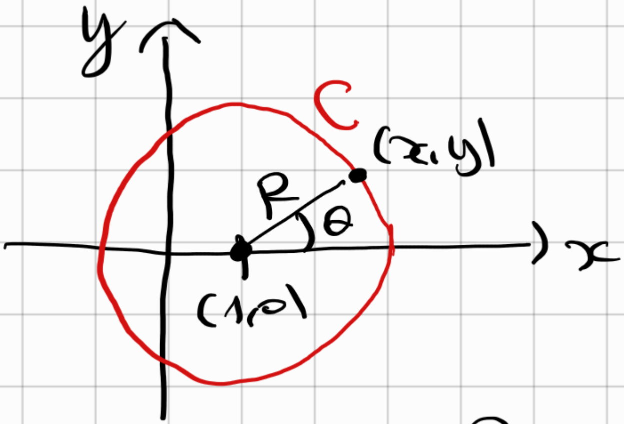
la funzione da massimizzare o minimizzare

Basta trovare i massimi/minimi

di $g = f \circ \Phi$

$$g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Es Voglio trovare massimi e minimi di $f(x,y) = 2x+y$ sulla circonferenza di raggio 2 centrata nel punto $(1,0)$



$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases}$$

circonferenza di raggio R centrata in (x_0, y_0)

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x = 1 + 2\cdot\cos\theta \\ y = 0 + 2\cdot\sin\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} 1+2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, hook, "\phi"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \theta \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g"'] & (x,y) \arrow[r, mapsto] & f(x,y) \end{tikzcd}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g = f \circ \phi$$

$$g(\theta) = f(\phi(\theta)) = f(1+2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x = 1+2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \qquad f(x,y) = 2x+y$$

$$g(\theta) = 2(\underbrace{1+2\cos\theta}_{x}) + \underbrace{2\sin\theta}_{y}$$

$$= 2 + 4\cos\theta + 2\sin\theta$$

Voglio trovare massimi e minimi di $g(\theta)$

($g(\theta)$ mi dà il valore di f sul punto di C che ha un angolo θ rispetto all'asse delle x).

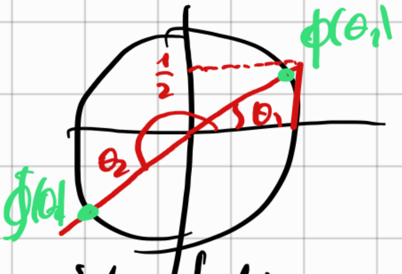
Trovo i punti "critici" di g:

$$g'(\theta) = -4\sin\theta + 2\cos\theta \overset{!}{=} 0$$

$$2\cos\theta = 4\sin\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$$

$\theta_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$



$\theta_2 = \theta_1 + \pi$

(avrei infinite altre sol. che però identificano gli stessi angoli).

I candidati max e min di f su C sono i punti $P_1 = \phi(\theta_1)$, $P_2 = \phi(\theta_2)$

$$P_1 = \begin{cases} x_1 = 1+2\cos\theta_1 \\ y_1 = 2\sin\theta_1 \end{cases} \qquad P_2 = \begin{cases} x_2 = 1+2\cos\theta_2 \\ y_2 = 5\sin\theta_2 \end{cases}$$

$f(P_1) = 2x_1 + y_1 = 2 + 4\cos\theta_1 + 2\sin\theta_1$

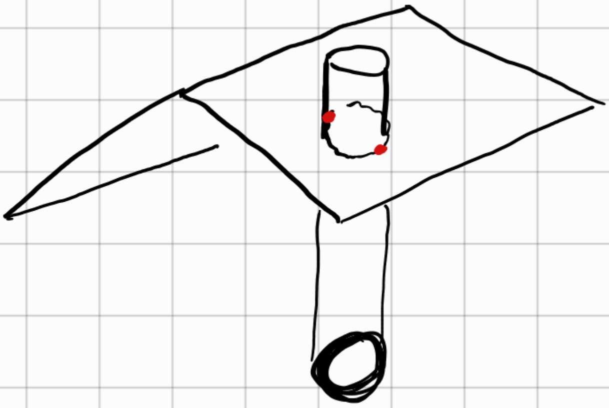
$f(P_2) = 2x_2 + y_2 = 2 + 4\cos\theta_2 + 2\sin\theta_2$

Massimo e minimo esistono per il teorema di Weierstrass (f continua, C è chiuso e limitato) dunque devono essere P_1 e P_2.

Visto che $\cos\theta_1 > 0$, $\sin\theta_1 > 0$

mentre $\cos\theta_2 < 0$ $\sin\theta_2 < 0$

$f(P_1) > f(P_2)$ dunque P_1 è il punto di massimo assoluto di f su C e P_2 è il punto di minimo assoluto di f su C.



•• Se S è data in forma implicita: $S = \{\underline{x} : G(\underline{x}) = 0\}$

Es (stesso di prima) $f(x,y) = 2x + y$

$$C = \{(x,y) : (x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2\}$$

Circonferenza di raggio R centrata in (x_0, y_0):

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$C = \{(x,y) : G(x,y) = 0\}$$

$$G(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 4$$

Idea: Scrivo la curva in forma parametrica
tramite il teorema del Dini,
e trovo le condizioni che determinano
i punti critici.

(MASSIMI e MINIMI "VINCOLATI")

Teo (metodo dei moltiplicatori di Lagrange) $f \in C^1$
Sia S una "superficie" data in forma implicita $G \in C^1$.

$$S = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : G(\underline{x}) = 0 \}, \quad G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $x^* \in S$ è un punto di massimo o minimo relativo per f su S allora ho due possibilità:

(1) $\nabla G(x^*) = \underline{0}$

oppure (2) esiste $\lambda \in \mathbb{R}$: $\boxed{\nabla f(x^*) = \lambda \cdot \nabla G(x^*)}$

↑ moltiplicatore di Lagrange.

ricordiamo che:

(a) $\nabla G(x^*)$ è un vettore normale alla superficie S nel punto x^*).

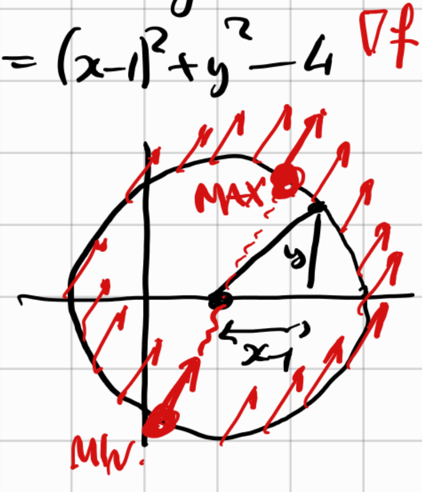
(b) $\nabla f(x^*)$ indica la direzione di massima crescita per la funzione f nel punto x^*

Completiamo l'esercizio di prima

$$f(x,y) = 2x + y$$
$$G(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 4$$

Nei massimi o minimi si deve avere
o $\nabla G = 0$ o $\nabla f = \lambda \cdot \nabla G$

$$\nabla f = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \nabla G = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$$



o $\nabla G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ← non sta su C quindi lo escludo.

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla G$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2 = \lambda \cdot 2(x-1) \\ 1 = \lambda \cdot 2(y) \end{array} \right\} \nabla f = \lambda \nabla g \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array} \right.$$ ← il punto sta su C.

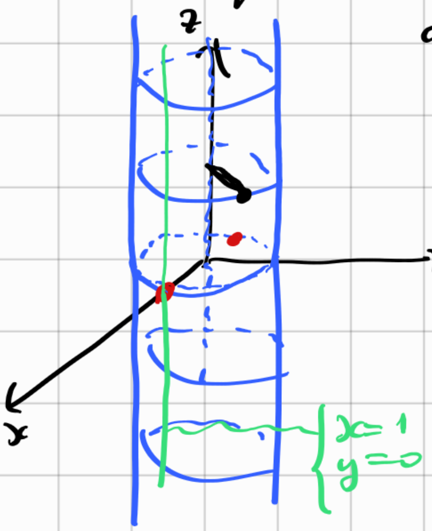
$$\begin{cases} 2 = \frac{x-1}{y} \\ \lambda = \frac{1}{2y} \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$ ← $\boxed{\frac{y}{x-1} = \operatorname{tg} \theta \text{ di prima}}$

↓

$$\begin{cases} 2y = x-1 \\ \lambda = \frac{1}{2y} \\ (2y)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y+1 \\ \dots \\ 5y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \\ y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

∘ ~ ∘ ~ ∘ ~ ∘ ~ ∘

Esercizio Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ il cilindro con asse l'asse z raggio 1. Trovare massimi e minimi della funzione $f(x,y,z) = x + z^2$ su S.



$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$= \{G = 0\} \qquad G(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla f = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}} \qquad \nabla G = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cancel{\begin{array}{l} \nabla G = 0 \\ x = y = 0 \end{array}}$$

Cerco (x,y,z) t.c. $\boxed{\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla G(x,y,z)}$

$$\begin{cases} \boxed{1 = \lambda \cdot 2x} \\ 0 = \lambda \cdot 2y \\ 2z = \lambda \cdot 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g \\ \\ G = 0 \end{array}$$

$0 = \lambda 2y$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2x} \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} < \begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (\lambda = \frac{1}{2}) \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (\lambda = -\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$\cancel{\begin{cases} 1 = 0 \quad \text{impossibile} \\ \lambda = 0 \end{cases}}$$

Ho due candidati: $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$

$f(x,y,z) = x + z^2$

$f(1,0,0) = 1 \leftarrow$ candidato massimo

$f(-1,0,0) = -1 \leftarrow$ candidato minimo

Osservo che $f(x,y,z) = x + z^2$ tende

a $+\infty$ se $z \to \pm\infty$ ad esempio su $(1,0,z) \in S$

$f(1,0,z) = 1+z^2 \to +\infty$ se $z \to \pm\infty$

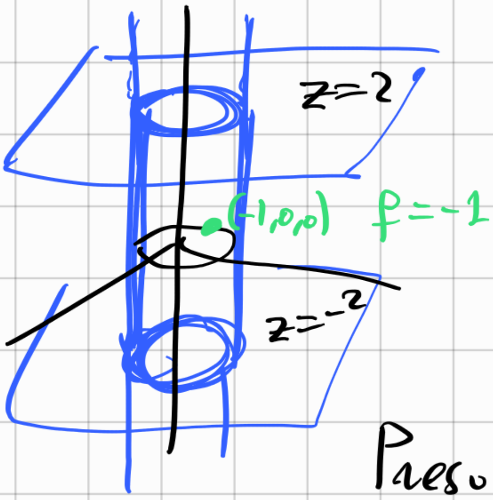
Quindi f non ha massimo.

Osservo anche che f è "limitata dal basso".

$$f(x,y,z) = x+z^2 \geq x \geq -1$$

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \quad \Downarrow \quad -1 \leq x \leq 1$$

Questo mi fa pensare che f possa avere minimo. Come lo dimostro?
Posso usare Weierstrass sui tronchi di cilindro:



$$f(x,y,z) = x+z^2$$

se $z>2$ o $z<-2$ $\Rightarrow z^2 \geq 4$

$$f(x,y,z) \geq x+4 \geq -1+4=3$$

Preso $K = C \cap \{|z| \leq 2\}$

$$= \{(x,y,z) : (x,y,z) \in C \text{ e } |z| \leq 2\}$$

K è $\underline{\text{limitato}}$ ed è $\underline{\text{chiuso}}$
dunque per Weierstrass f ha massimo e minimo su K. Sia P il punto di minimo per f su K. Visto che $(-1,0,0) \in K$,

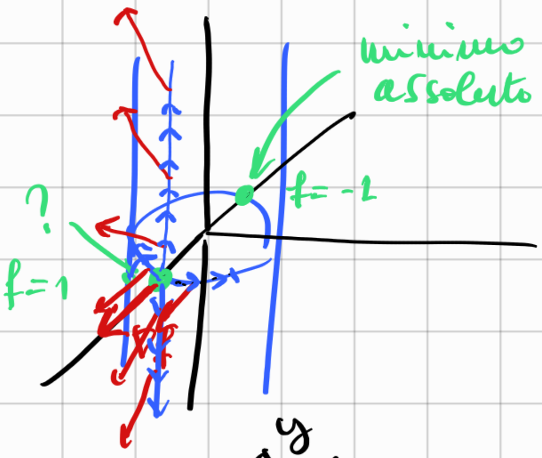
$$f(P) \leq f(-1,0,0) = -1.$$

ma su $C \setminus K$ $\quad f \geq 3 > -1$

Quindi P è minimo di f su tutto C!
Dunque esiste un punto di minimo

e deve essere uno di quelli dati dei moltiplicatori di Lagrange. Dunque $(-1,0,0)$ è punto di minimo assoluto.

Cosa posso dire di $(1,0,0)$? Per caso è un max/min relativo?

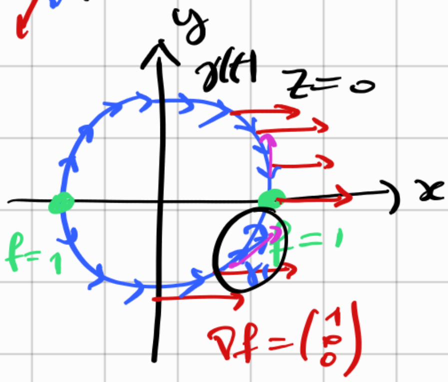


$f=x+z^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix}1\\0\\2z\end{pmatrix}$$

$\underline{f(1,0,z)} = \underline{1+z^2}$ ha minimo per $z=0$

$(1,0,0)$ non è massimo locale.

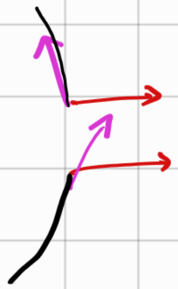


$(1,0,0)$ è massimo di f sulla circonferenza:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f \cdot \gamma'(t)$$



Quindi $(1,0,0)$ non è neanche minimo locale.

Esercizio 1 (🏠) Trovare massimi e minimi della funzione $f(x,y,z) = x+y+z$ sulla sfera di raggio 2 centrata nel punto $(1,0,2)$.

Esercizio 2 (🏠) Trovare, se esistono, massimi e minimi della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z$ sul piano $x+y-z=2$.