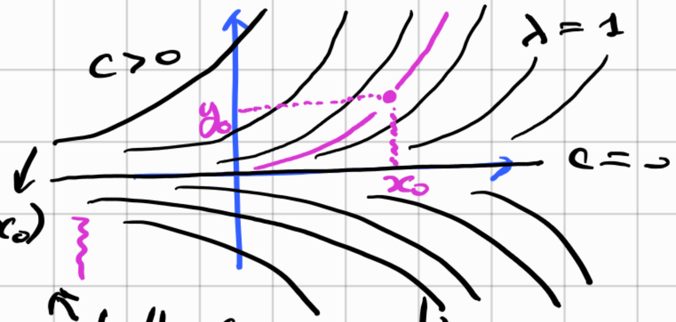
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 73 — 4.4.2023

Ieri $\quad u' = \lambda u \quad$ eq. lineare omogenea a coefficienti costanti I ordine autonoma.

$u_1(x) = e^{\lambda x}$ è soluzione

lineare $\Rightarrow$ $u(x) = c \cdot e^{\lambda x}$ è soluzione $\forall c \in \mathbb{R}$

disegniamo le soluzioni:



osservazione $\quad c\, e^{\lambda x} \overset{?}{=} e^{\lambda(x-x_0)} = \dfrac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x_0}}$

$x_0 = -\dfrac{\ln c}{\lambda} \qquad c = \dfrac{1}{e^{\lambda x_0}} = e^{-\lambda x_0}$

se c è positivo

$c\, e^{\lambda x} = 0 \quad$ se $c = 0$

$c\, e^{\lambda x} = -e^{\lambda(x-x_0)} = -\dfrac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x_0}} \qquad$ se $c<0$

$c = -e^{-\lambda x_0}$

$x_0 = -\dfrac{\ln(-c)}{\lambda}$

Per ogni punto del piano c'è una e una sola soluzione che passa da quel punto.

Eq. diff. in forma normale

Problema di Cauchy:
$$\begin{cases} u'(x) = \lambda \cdot u(x) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema di Cauchy-Lipschitz per $\quad u'(x) = f(x, u(x))$

se f è di classe C^1 (basta un po' meno)

allora fissato x_0 e y_0 il problema di Cauchy ha soluzione definita in almeno un piccolo intorno di x_0, e tale soluzione è unica.

Esempio $\boxed{u' - \frac{u}{x} = x^2}$ $\quad x \neq 0 \quad u' = f(x, u(x))$

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y}{x}$$

lineare in y per ogni fissato x.

è eq. lineare I ordine, non-omogenea a coefficienti non costanti

$$u' = \underbrace{a(x)}_{\text{coefficiente}}\, u(x) + \underbrace{b(x)}_{\text{termine noto}}$$

Fattore integrante $e^{A(x)}$ $\quad A(x) = \int \left(-\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\ln x & \text{se } x>0 \\ -\ln(-x) & \text{se } x<0 \end{cases}$

$$e^{A(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x>0 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

Posso moltiplicare per $\frac{1}{x}$ anche se $x<0$.

$$u' \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot u = x$$

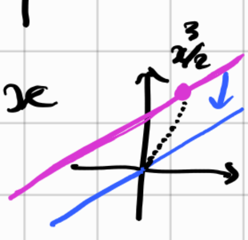
$$\left(u(x) \cdot \frac{1}{x}\right)' = x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$$

su ogni intervallo $\quad \frac{u(x)}{x} = \frac{x^2}{2} + c \quad \uparrow \int x$

$$u(x) = \boxed{\frac{x^3}{2} + cx}$$

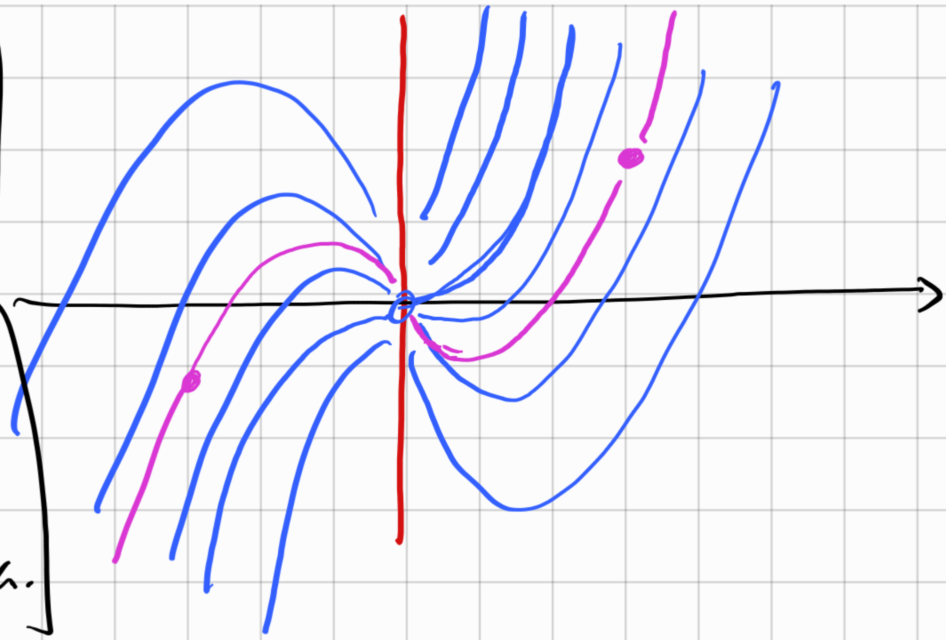
soluzione dell'omogenea

soluzione particolare della non omogenea



[La soluzione deve essere definita su un intervallo]

[Si può parlare di INTERVALLO MASSIMALE di esistenza.]



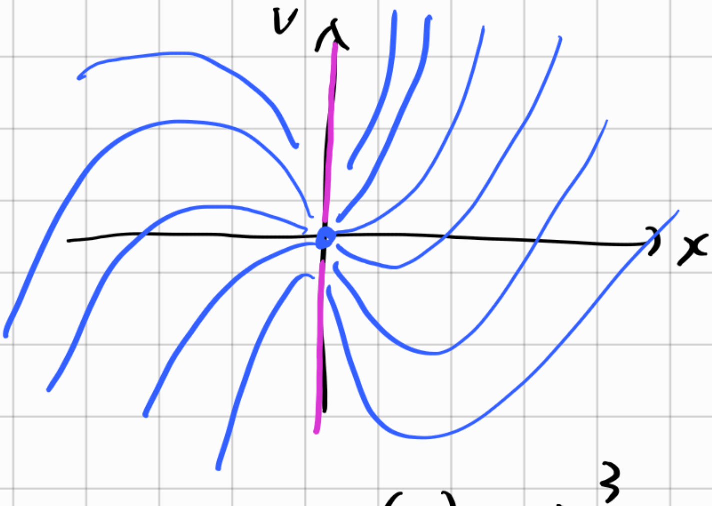
in questo caso le soluzioni sono globali

(cioè l'intervallo nominale è il più grande possibile in cui l'equazione ha senso).

L'equazione in forma normale $u' - \frac{u}{x} = x^2$ "deriva" dell'equazione in forma esplicita:

$$\boxed{x u' - u = x^3}$$

se $x \neq 0$ è equivalente alla precedente.



Le soluzioni sono $u(x) = \frac{x^3}{2} + cx$.

$u(0)=0$ per continuità. È per verifica diretta (o per argomento di continuità)

è sol. anche per $x=0$ e c è lo stesso per $x>0$ e $x<0$

altrimenti u non sarebbe derivabile in $x=0$.

Osservazione:

$$\begin{cases} x u' = x^3 + u \\ u(0) = y_0 \end{cases}$$

Se $y_0 = 0$ ho infinite soluzioni

Se $y_0 \neq 0$ non ho alcuna soluzione.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI I ORDINE

$$\boxed{\begin{array}{c} u' = h(x, u(x)) \\ h(x,y) \\ \shortparallel \\ f(x)\cdot g(y) \end{array}}$$

$$u'(x) = f(x)\cdot g(u(x))$$

Quando $g(u(x)) \neq 0$ posso dividere:

$$\frac{u'(x)}{g(u(x))} = f(x)$$

$$\left[\begin{array}{ll} y = u(x) & G = \int \frac{1}{g} \\ \multicolumn{2}{l}{\left(G(u(x))\right)' = G'(u(x))\cdot u'(x) = \frac{1}{g(u(x))}u'(x)} \end{array}\right]$$

$$\left(G(u(x))\right)' = f(x)$$

$$G(u(x)) = \int f(x)$$

se G è invertibile $\quad u(x) = G^{-1}\left(\int f(x)\right)$

In pratica si fa così:

$$u'(x) = f(x) \cdot g(u(x))$$

$$\frac{du}{dx} = f \cdot g(u)$$

$$\frac{\frac{du}{dx}}{g(u)} = f$$

Integro in dx (moltiplico per dx)

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f\, dx$$

Esempio $\quad u'(x) = x^2 \cdot e^{u(x)}$

$$\frac{u'(x)}{e^{u(x)}} = x^2 \qquad \int \frac{\overbrace{u'(x)\, dx}^{du}}{e^{u(x)}} = \int x^2\, dx$$

$$\begin{cases} u = u(x) & (\text{o } y = u(x)) \\ du = u'(x)\, dx \end{cases} \qquad \left[\int \frac{du}{e^u}\right]_{u=u(x)} = \frac{x^3}{3} + c$$

importante

$$\left[\ \int e^{-u}\,du = -e^{-u}\ \right]$$

$$-e^{-u(x)} = \frac{x^3}{3}+c \quad \leftarrow \quad \boxed{\frac{x^3}{3}+c<0}$$

Ricavo $u(x)$:

$$-u(x) = \ln\left(-\frac{x^3}{3}-c\right)$$

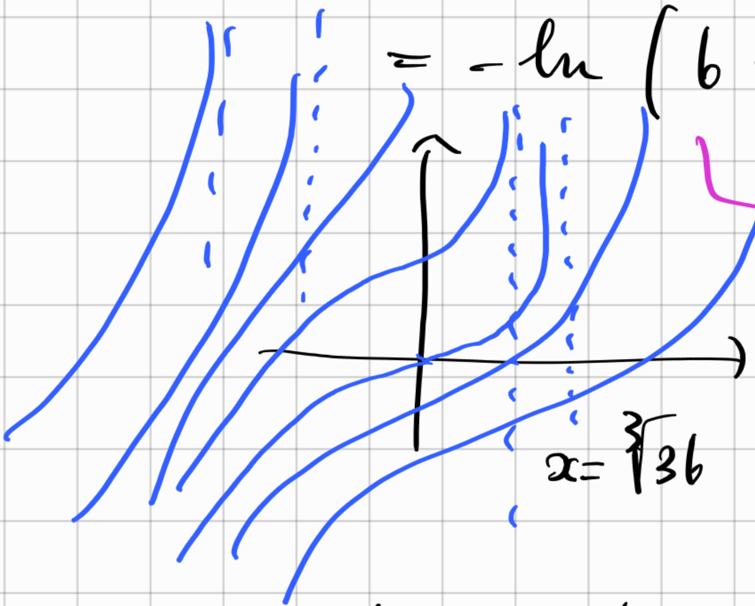
$$u(x) = -\ln\left(-\frac{x^3}{3}-c\right) \qquad b=-c$$

$$= -\ln\left(b-\frac{x^3}{3}\right)$$

$$\frac{x^3}{3}<b$$

$$x^3<3b$$

$$\boxed{x<\sqrt[3]{3b}}$$



Le soluzioni non hanno esistenza globale.

Esercizio già fatto: $u'=\lambda u$. $\qquad \lambda=2$

$$u'=2u$$

è a variabili separabili!

Se $\boxed{u(x)\neq 0}$:

$$\frac{u'}{u}=2$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = 2x+c$$

$$\int \frac{du}{u} = 2x+c$$

$$\ln|u(x)| = 2x+c$$

$$\frac{u'}{u}=2$$

$$\frac{\frac{du}{dx}}{u}=2$$

$$\int\frac{du}{u}=\int 2\,dx$$

$$|u(x)| = e^{2x+c} = e^c \cdot e^{2x}$$

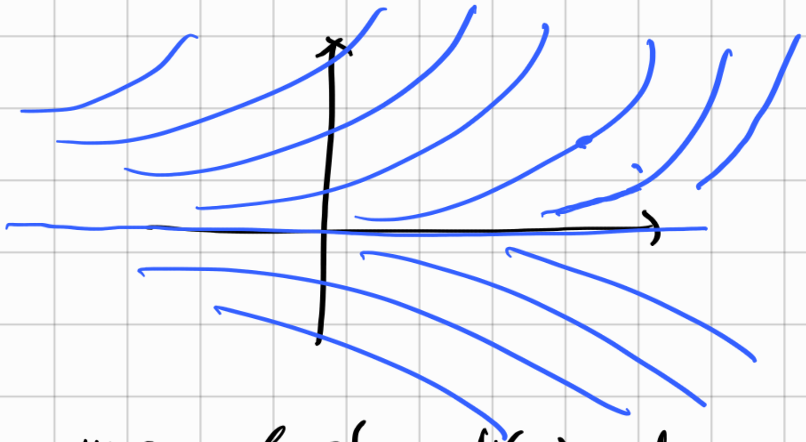
$$k = e^c, \quad k>0$$

$$|u(x)| = k \cdot e^{2x}$$

$$u(x) = \pm k \cdot e^{2x} = \underline{\underline{k e^{2x}}}, \quad k \in \mathbb{R}, k \neq 0.$$

ma avevo supposto $u(x) \neq 0$

D'altra parte $u = 0$ è soluzione.



<u>Dubbio</u> ci può essere una soluzione $u(x)$ che si annulla solo in alcuni punti?

No: se la soluzione è diversa da zero in almeno un punto deve coincidere, dove è diversa da zero,

con $u(x) = \underline{\underline{k e^{2x}}}$ che non tende mai a zero.