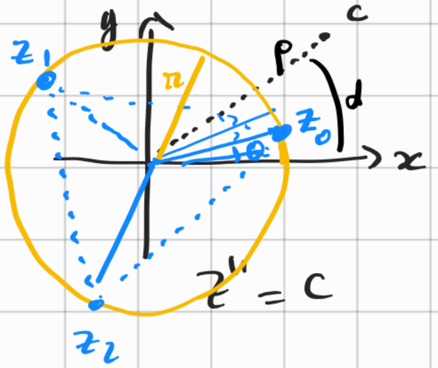
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 58 – 1.3.2023

Intermezzo: come si risolve $z^n = c$? $c \in \mathbb{C}$



$|z^n| = |z|^n \qquad z^n = c \qquad |z| = \sqrt[n]{|c|}$

$c = \rho e^{i\alpha} \qquad z = r \cdot e^{i\theta}$

$z^n = r^n \cdot e^{in\theta} \overset{!}{=} \rho e^{i\alpha}$

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Teo Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è ~~uniformemente~~ continua allora f è R-integrabile su $[a,b]$

Def $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è unif. continua se

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A : \underbrace{|x-y|}_{d(x,y)} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{d(f(x),f(y))} < \varepsilon.$$

Visto: f unif. cont. $\Rightarrow$ f continua

Visto: $f(x) = x^2$ è continua ma non unif. cont.

Teorema (Heine-Cantor) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua allora f è uniformemente continua.

(è sequenzialmente compatto.)

dim Per assurdo supponiamo che f sia continua ma non uniformemente continua.

$$\neg\, \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y\in[a,b] : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

$$\exists\, \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x,y\in(a,b) : |x-y|<\delta \text{ ma } |f(x)-f(y)|\geq \varepsilon.$$

$$\delta=\frac{1}{n}$$

$$\exists \varepsilon>0\ \forall n\ \exists x_n, y_n : |x_n-y_n|<\frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon.$$

Per Bolzano-Weierstrass $\exists\, x_{n_k}\to x.$ $\quad x\in[a,b]$

$$|y_{n_k}-x_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\to 0$$

$$y_{n_k}\to x$$

Essendo f continua: $\quad f(x_{n_k})\to f(x)$

$$f(y_{n_k})\to f(x)$$

ma $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon$ assurdo $\square$

Esempio $\quad f(x)=\frac{1}{x} \qquad f:(0,1)\to\mathbb{R}$

è continua ma non unif. continua.

$x_n=\frac{1}{n} \qquad y_n=\frac{1}{n+1} \quad\Rightarrow\quad f(y_n)-f(x_n)=(n+1)-n$
$=1.$

f non è uniformemente continua.
[Scelto $\varepsilon=1$ $\ \forall\delta\ \exists n: |x_n-y_n|<\delta$ ma $|f(x_n)-f(y_n)|=1.$]

$$\mathcal{R}([a,b])\supseteq \operatorname{span}\{C^0([a,b])\cup\{\text{monotone}\}\}$$

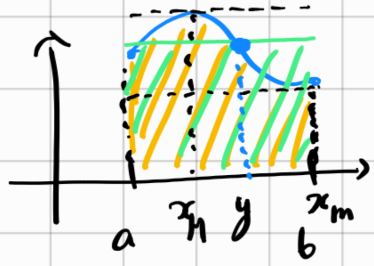
TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Teorema (media integrale) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua $\exists\ y\in[a,b]$ tale che:

$$\fint_a^b f \doteq \frac{\int_a^b f}{b-a} = f(y)$$

$$\frac{\int_a^b f}{b-a} = \frac{\int_b^a f}{a-b}$$

$\uparrow$ valor medio di f



dim Per Weierstrass f ha massimo e minimo su $[a,b]$.

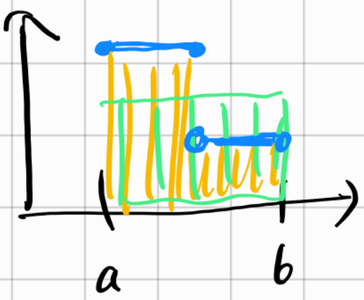
* $$\begin{cases} \max\limits_{[a,b]} f = M \\ \min\limits_{[a,b]} f = m \end{cases} \qquad m \le f(x) \le M \quad \forall x\in[a,b]$$

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m \le \int_a^b f \le \int_a^b M = M\cdot(b-a)$$

$$f(x_m) = m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f}{b-a}}_{\leftarrow \text{ è un valore intermedio}} \le M = f(x_M)$$

f è continua $\Rightarrow \exists\ y$ t.c. $f(y) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a}$ $\square$.

ES



$\leftarrow$ qui non vale.

Abbiamo usato il seguente:

Teorema [monotonia dell'integrale]

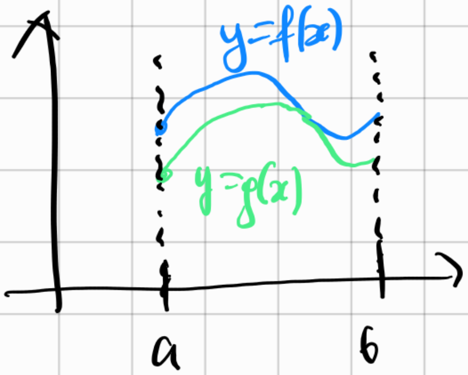
Se $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ e $f \geq g$

(significa che $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$)

Allora $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

dim $f \geq g \Rightarrow \sup_A f \geq \sup_A g$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ S^*(f,P) &\geq S^*(g,P) \\ &\Downarrow \\ S^*(f) &\geq S^*(g) \\ \| \quad & \quad \| \\ \int_a^b f \quad & \quad \int_a^b g \end{aligned}$$



$\square$

Teorema (Torricelli-Barrow) T. FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, continua, I intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

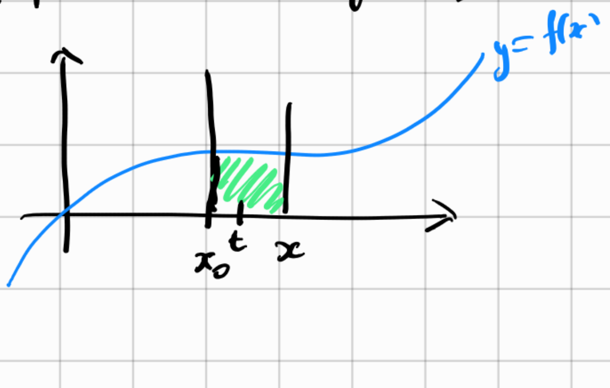
Fissato $x_0 \in I$ consideriamo $\forall x \in I$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{(funzione integrale)}$$

$F : I \to \mathbb{R}$.

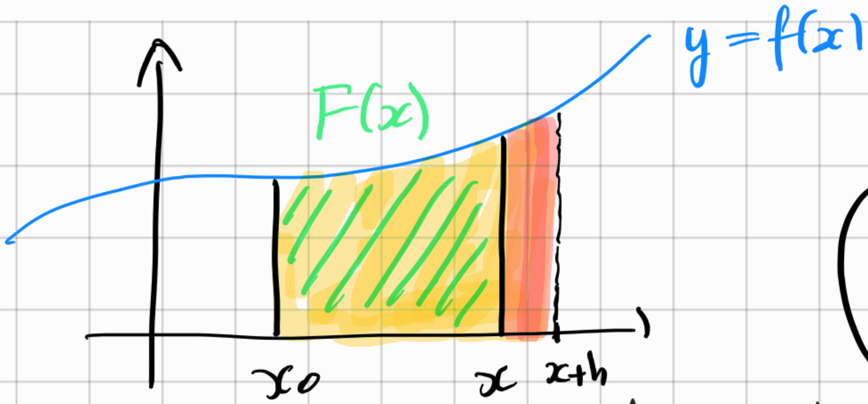
Allora F è derivabile e

$$F'(x) = f(x).$$



Ricordo es: $\int_0^b x^2 = \frac{b^3}{3} = F(b)$. $F'(x) = x^2$.

dim



Teo media integrale

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f}{h} = \fint_x^{x+h} f = f(y_h) =$$

$$= f(y_h) \longrightarrow f(x) \quad \square$$

per $h \to 0$

$y_h \to x$

$\exists\, y_h \in \begin{cases} [x, x+h] & \text{se } h \geq 0 \\ [x+h, x] & \text{se } h \leq 0 \end{cases}$

$|y_h - x| < h.$

$h \to 0$: $y_h \to x$

Seconda parte: Se $G: I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile tale che $G'(x) = f(x)$.

Allora $\forall a,b \in I$ $\quad \int_a^b f = G(b) - G(a).$

[Es $\int_0^\pi \sin x \, dx = G(\pi) - G(0) = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$

$G(x) = -\cos x$

$G'(x) = \sin x$]

dim Sia

$F(x) = \int_a^x f$. Per la prima parte $F' = f$.

$$(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$$

$G - F$ è costante! (criteri di monotonia)

[siamo su un intervallo!]

$\exists c: \quad G(x) - F(x) = c \implies F(x) = G(x) - c$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b) = G(b) - c = G(b) - G(a).$$

$$0 = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) = G(a) - c \Rightarrow c = G(a) \qquad \square$$

Def diciamo che F è una primitiva di f se $F' = f$.

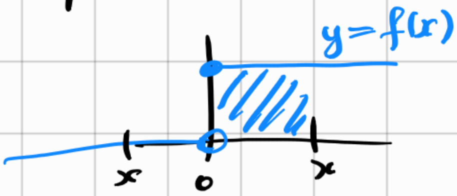
$$F \xmapsto{D} f$$

$$D^{-1}(\{f\}) = \{F : DF = f\} = \{\text{primitive di } f\}.$$

Teo fondamentale: Se f è continua la funzione integrale è una primitiva di f.

Attenzione che f sia continua è importante.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

F non è derivabile in 0

non vale $F'(x) = f(x)$ quando $x = 0$.

se $x \neq 0$ allora sì: $F'(x) = f(x)$ ⊟.