ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 46 - 1.2.2023

Es. $\sum_k \sqrt{k} \cdot \left(k \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{k} - \cos\frac{1}{k}\right)$ converge?

(condizione sufficiente)

In generale $\sum_k a_k$ converge se $|a_k| \sim \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$.
$x = \frac{1}{k}$ $\quad k \to +\infty$

se posso scrivere $a_k = f\left(\frac{1}{k}\right)$ con $f(x)$ funzione definita in un intorno di 0^+, posso provare ad utilizzare la formula di Taylor per f centrata in $x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} \cdot \underbrace{\operatorname{tg} x}_{} - \underbrace{\cos x}_{} \right) \qquad x \to 0^+$$

Posso applicare Taylor

→ Taylor non si applica

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \right)$$

$$\left[\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\cancel{1} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{5}{6} x^2 + o(x^2) \right] = \frac{5}{6} x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$a_k = f\left(\frac{1}{k}\right) = \underbrace{\frac{5}{6} \frac{1}{k^{3/2}} + o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)}_{} \quad \text{per } k \to +\infty$$

So che $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ è convergente perché $\frac{3}{2} > 1$

$$a_k \sim \frac{5}{6} \frac{1}{k^{3/2}}$$

$$\frac{a_k}{\frac{5}{6}\frac{1}{k^{3/2}}} = 1 + \frac{o\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)}{\frac{5}{6}\frac{1}{k^{3/2}}} \to 1$$

(il secondo termine $\to 0$)

Oss in particolare

$$a_k = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \underbrace{\left[\frac{5}{6} + o(1) \right]}_{\to \frac{5}{6}}$$

per la permanenza del segno è positivo in un intorno di $+\infty$ ovvero è definitivamente positivo

$\Rightarrow a_k > 0$ definitivamente

$\Rightarrow$ posso applicare il criterio di confronto asintotico

$\Rightarrow \sum a_k$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{5/6}{k^{3/2}}$

$\Rightarrow$ è convergente

Calcoliamo il polinomio di Taylor della tangente.

$f(x) = tg\, x = t$ $\qquad f(0) = 0$

$$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5$$

$f' = 1 + t^2$ $\qquad f'(0) = 1$

$f'' = 2t(1+t^2)$ $\qquad f''(0) = 0$

$= 2t + 2t^3$

$f''' = 2(1+t^2) + 6t^2(1+t^2)$ $\qquad f'''(0) = 2$

$= 2 + 8t^2 + 6t^4$

$f^{IV} = 16t(1+t^2) + 24 \cdot t^3(1+t^2)$ $\qquad f^{IV}(0) = 0$

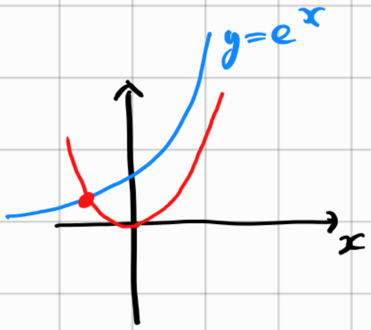
$= 16t + 40t^3 + 24t^5$

$f^{V}(0) = 16$ $\qquad \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$.

Es Test settimanale n. 6

$x^2 = e^x$ calcolare $\lfloor x^2 + 2\ln|x| + 1 \rfloor$

1. Quante sol. ha l'equazione.



$$f(x) = e^x - x^2 \Rightarrow f(x) = 0$$

a. Osservo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 1$

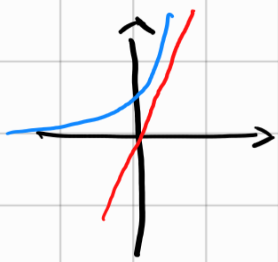
f continua, per il teorema degli zeri $\exists$ almeno una soluzione $x<0$.

b. $f(x)$ è strettamente crescente perché somma di funzioni strett. crescenti. (x^2 è strett. decrescente su $(-\infty, 0]$)

[Oppure: faccio la derivata: $f'(x) = e^x - 2x > 0$ se $x < 0$.]

Dunque in $(-\infty, 0]$ c'è una unica soluzione.

Se $x>0$ $\quad f'(x) = e^x - 2x$



$$f''(x) = e^x - 2$$

$f''(x) = 0$ per $x = \ln 2$

x		$\ln 2$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$$f'(\ln 2) = 2 - 2\cdot\ln 2 = 2(1-\ln 2) > 0$$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

la soluzione già trovata è unica su tutto $\mathbb{R}$.

Sia x l'unica soluzione, $(x<0)$ $\quad x^2 = e^x$

$\ln x^2 = x$

$$\lfloor x^2 + 2\ln|x| + 1 \rfloor = ?$$

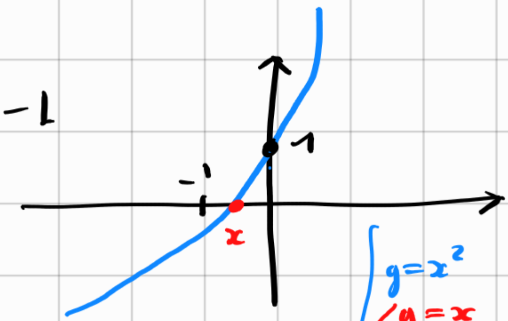
$$\parallel$$

$$\lfloor x^2 + x + 1 \rfloor$$

$2\ln|x| = x$

$\Delta = 1 - 4 < 0$

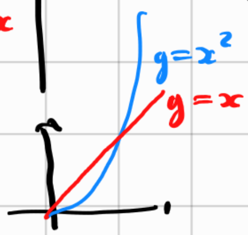
$x \overset{?}{\gtrless} -1$



$f(x) = e^x - x^2 \qquad f(0) = 1$

$f(-1) = \frac{1}{e} - 1$

$= \frac{1-e}{e} < 0$



$\underline{-1 < x < 0} \qquad \underline{0 < x^2 < |x|} = -x$

$-1 < x^2 + x < 0 \qquad 0 < x^2 + x + 1 < 1$.

furbizia!

[Se non sono abbastanza furbo ottengo $0 < x^2 + x + 1 < 2$

$x^2 + x + 1 < 1 \qquad x^2 + x < 0$

$x(x+1) < 0$

$x + 1 > 0$

$x > -1$]

$\lfloor x^2 + x + 1 \rfloor = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{\cos(x^2)}-1\right)}{\operatorname{arctg}^4 x}$$

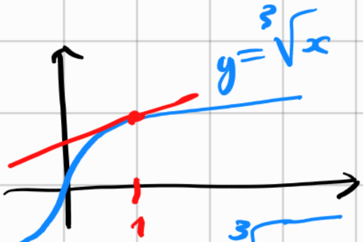
$$\operatorname{arctg}^4 x = x^4 + o(x^4)$$

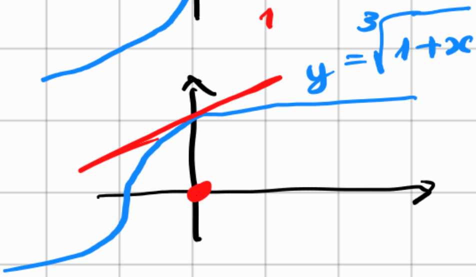
$$\underbrace{\operatorname{arctg} x = x + o(x)}$$
$$(\operatorname{arctg} x)^4 = (x+o(x))^4$$
$$= x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \underline{x\to 0}$$

$$\boxed{\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}$$

$$\sqrt[3]{\cos(x^2)} = \sqrt[3]{1 \underbrace{- \frac{x^4}{2} + o(x^4)}}$$





$$g(x) = \sqrt[3]{1+x}$$
$$= (1+x)^{1/3}$$
$$g'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$$

$$g(x) = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$$

$$\sqrt[3]{\cos(x^2)} = \sqrt[3]{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = g\Big(\underbrace{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}\Big) = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + o(x^4)$$
$$= 1 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\frac{\sin\left(\sqrt[3]{\cos x^2} - 1\right)}{\operatorname{arctg}^4 x} = \frac{\sin\left(\cancel{1} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \cancel{1}\right)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \longrightarrow -\frac{1}{6}$$

$$[\sin x = x + o(x)]$$

Più in generale conviene memorizzare lo sviluppo di: $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$
8 $\to$ $$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$$

$$f(x) = 1 + \alpha\cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n$$

Dove abbiamo esteso la definizione di coeff. binomiale:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

[Se α fosse intero, allora, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}$]

Si applica quando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}}{2}x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$o(1+x+x^2) = o(1)$$

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

$$o\big(f(x)+o(f(x))\big) = o(f(x))$$

$$\boxed{f(x)+o(f(x)) \sim f(x)}$$

$$x \to x_0$$

$$\boxed{\text{Se } f \sim g \qquad o(f) = o(g)}$$

$$h \in o(f) \qquad\qquad h \in o(g)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{h}{f} \to 0 \qquad\qquad \frac{h}{g} \to 0$$

$$\frac{h}{g}\cdot\frac{f}{f} = \frac{h}{f}\cdot\frac{f}{g}$$

$$\frac{f+o(f)}{f} = 1 + \frac{o(f)}{f} \to 0$$

$$h \in o\big(f+o(f)\big) \qquad\qquad h \overset{?}{\in} o(f)$$

$$\Uparrow$$

$$h \in o(g) \quad \text{per qualche } g \in f + o(f)$$

$$\frac{h}{f} = \frac{h}{g}\cdot\frac{g}{f} = \underset{\to 0}{\frac{h}{g}} \cdot \underset{\to ?}{\frac{g}{f+o(f)}} \cdot \underset{\to 1}{\frac{f+o(f)}{f}} \to 0$$