ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 5 - 13.3.20

Completiamo il caso vettoriale: $u:[a,b]\to\mathbb{R}^n$. $\quad c\in\mathbb{R}^n$

Avevamo già osservato che:

prodotto scalare

$$(\phi \circ f)^* \gamma = F(x,\underline{u_c},\underline{u_c'})\,dx + \sum_j F_p(x,u_c,u_c')\cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j}\, dc_j$$

è chiusa?

vero se u_c soddisfa E.L:

$$\boxed{F_{z_k}(x,u,u') = \frac{d}{dx} F_{p_k}(x,u,u')}$$

già visto

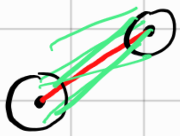
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dc_j} F(x,u_c,u_c') = \dfrac{d}{dx} F_p(x,u_c,u_c')\dfrac{\partial u_c}{\partial c_j} \\[2ex] \dfrac{d}{dc_k} F_p(x,u_c,u_c')\cdot\dfrac{\partial u_c}{\partial c_j} = \dfrac{d}{dc_j} F_p(x,u_c,u_c')\dfrac{\partial u_c}{\partial c_k} \end{cases}$$

$[c_j,c_k]=0$

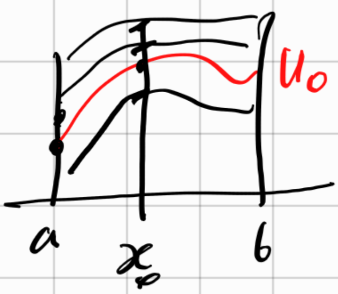
parentesi di Lagrange.

Bisogna imporre che questo sia verificato

Es (pb. della geodetica)



Nel caso scalare c'è esistenza locale della fibrazione



$$\begin{cases} u_c(x_0) = u_0(x_0) + c \\ u_c'(x_0) = u_0'(x_0) \\ + \text{E.L.} \quad (\text{secondo ordine}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{E.L.}}$

$$F_z(x,u_c,u_c') = \frac{d}{dx} F_p(x,u_c,u_c') \quad \leftarrow \text{vettori}$$

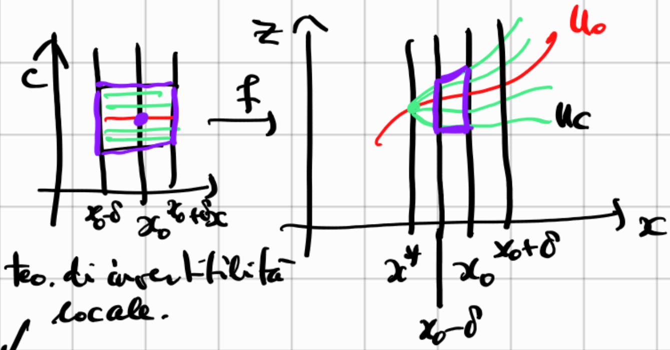
$$F_z(x,u_c,u_c') = F_{px}(-) + F_{pz}(-)\cdot u_c' + F_{pp}(-)\cdot u_c''$$

matrice $\quad p=p_k$, $z=z_j$

Supponiamo che F_{pp} sia invertibile in x_0 e quindi in un intorno di x_0.

Ha sol. locale (Cauchy-Lipschitz) $\longrightarrow$

$$E.L: \begin{cases} u_c'' = F_{pp}^{-1}\left(F_z(\ldots) - F_{px}(\ldots) + F_{pz}(\ldots)\, u_c'\right) \\ u_c(x^*) = u_0(x^*) \\ u_c'(x^*) = \underbrace{u_0'(x^*) + c} \end{cases}$$



teo. di invertibilità locale

$$f(x,c) = (x, u_c(x))$$

f è localmente invertibile se Jf è invertibile in $(x_0, 0)$

• $$u_c(x) = \underbrace{\overset{u_0(x^*)}{u_c(x^*)}} + \overset{u_0'(x^*)+c}{u_c'(x^*)} \cdot (x - x^*) + o(x - x^*)$$

$$Jf(x_0,0) = \begin{pmatrix} \overset{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)} & 0 \; 0 \; 0 \; 0 \\ & \boxed{\frac{\partial}{\partial c} u_c(x_0)} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial c} u_c(x) = 0 + \underbrace{Id \cdot (x - x^*)} + \underbrace{o(x - x^*)}$$

è invertibile se $|x - x^*|$ è abbastanza piccolo!

• Verifichiamo ora che $[c_j, c_k] = 0$

Ovvero che $\frac{d}{dc_k}\left(F_p(x, u_c, u_c') \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j}\right)$ è simmetrico in (k,j)

(1) verifichiamo che lo è per $x = x^*$.

(2) $\frac{d}{dx}[c_j, c_k] = 0$

$\Rightarrow [c_j, c_k] = 0 \quad \forall x.$

dim (1) se $x = x^*$, $u_c = u_0$ non dipende da c

dunque $\frac{\partial u_c}{\partial c_j}(x^*) = 0 \Rightarrow F_p \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dc_k}\left(F_p \cdot \frac{\partial u_c}{\partial c_j}\right) = 0$$

(2) devo mostrare che:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dc_k}\left(F_p(x,u_c,u_c')\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c_j}\right)}_{(*)}-\frac{d}{dc_j}\left(F_p(x,u_c,u_c')\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c_k}\right)\right]=0$$

$$(*)\quad=\frac{d}{dc_k}\left[\left(\underbrace{\frac{d}{dx}F_p(x,u_c,u_c')}_{E.L.}\right)\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c_j}+F_p(x,u_c,u_c')\cdot\frac{\partial}{\partial c_j}u_c'\right]$$

$$=\frac{d}{dc_k}\left[F_z(x,u_c,u_c')\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c_j}+F_p(x,u_c,u_c')\cdot\frac{\partial}{\partial c_j}u_c'\right]$$

$$=\left[F_{zz}\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c_k}+F_{zp}\cdot\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}\right]\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c_j}+F_z\cdot\frac{\partial^2 u_c}{\partial c_k\partial c_j}+$$

$$+\left[F_{pz}\cdot\frac{\partial u_c}{\partial c_k}+F_{pp}\cdot\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}\right]\cdot\frac{\partial u_c'}{\partial c_j}+F_p\cdot\frac{\partial^2}{\partial c_k\partial c_j}u_c'$$

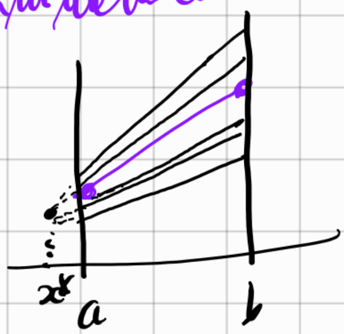
$$=\cancel{F_{zz}\frac{\partial u_c}{\partial c_k}\frac{\partial u_c}{\partial c_j}}+\cancel{F_{zp}\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}\frac{\partial u_c}{\partial c_j}}+\cancel{F_z\frac{\partial^2 u_c}{\partial c_k\partial c_j}}+$$

$$+\cancel{F_{pz}\frac{\partial u_c}{\partial c_k}\frac{\partial u_c'}{\partial c_j}}+\cancel{F_{pp}\frac{\partial u_c'}{\partial c_k}\frac{\partial u_c'}{\partial c_j}}+\cancel{F_p\frac{\partial^2 u_c'}{\partial c_k\partial c_j}}=\text{simmetrico in }(k,j).$$

cancello quello che è simmetrico

$\square$

Esempio



Esempi di problematiche che non abbiamo coperto finora.

(1) Problemi di ottimizzazione con estremi liberi.

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x))\,dx \longrightarrow \min \\ u \in C^1([a\,b]) \qquad u(a) \text{ e } u(b) \text{ non sono vincolati.} \end{cases}$$

OSS se u è minimo per questo problema è ovviamente minimo nella classe ristretta delle funzioni che hanno il suo stesso dato al bordo.

Se u è minimo $\quad \delta\mathcal{F}(u,\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C^1$

$\Rightarrow$ vale E-L.

ma si ha di più:

$$\delta\mathcal{F}(u,\varphi) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(u+\varepsilon\varphi) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_a^b F(x, \underline{u+\varepsilon\varphi}, \underbrace{(u+\varepsilon\varphi)'})\,dx$$

$$= \int_a^b \left[F_z(x,u,u')\cdot\varphi + F_p(x,u,u')\cdot\varphi'\right] dx$$

$$= \int_a^b \Big[\underbrace{F_z(x,u,u') - \frac{d}{dx}F_p(x,u,u')}_{1}\Big]\varphi + \underbrace{\Big[F_p(x,u,u')\cdot\varphi\Big]_a^b}_{2}$$

se $\varphi \in C^1_0 \Rightarrow$ (2) $= 0 \Rightarrow$ (1) $= 0$ $\quad \boxed{F_z - \frac{d}{dx}F_p = 0}$

ma se (1) $= 0$ allora se φ è qualunque anche (2) $= 0$.

(2) $= F_p(b, u(b), u'(b))\cdot\varphi(b) - F_p(a, u(a), u'(a))\cdot\varphi(a)$

posso scegliere φ tale che $\varphi(b) = 1$ e $\varphi(a) = 0$

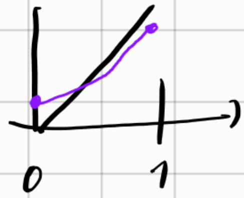
ottengo $\quad F_p(b, u(b), u'(b)) = 0$

posso scegliere φ tale che $\varphi(a) = 1$ e $\varphi(b) = 0$

ottengo $\quad F_p\big(a, u(a), u'(a)\big) = 0.$

<u>Esempio</u> $\quad \mathcal{F}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[|u'(x)|^2 + |u-x|^2 \right] dx$

Trovare il minimo di u su tutto $C^2([a,b])$.



$$F(x,z,p) = \frac{1}{2}\left[p^2 + (z-x)^2\right]$$

$$F_z = z - x \qquad F_p = p$$

E.L.: $\qquad u - x = \frac{d}{dx} u' \qquad u'' - u = -x$

$$u(x) = x + Ae^{x} + Be^{-x}$$

condizioni al bordo: $\quad F_p(x, u(x), u'(x)) = 0$ per $x = a$ e per $x = b$

$$u'(0) = 0$$
$$u'(1) = 0$$

$$u'(x) = 1 + Ae^{x} - Be^{-x} \qquad \begin{cases} 1 + A - B = 0 \\ 1 + A\cdot e - \frac{B}{e} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 1 + A \\ 1 + A\cdot e - \frac{(1+A)}{e} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1-e}{e^2-1} \\ B = 1 + A = \frac{e^2-e}{e^2-1} \end{cases} \qquad u(x) = x + \frac{1-e}{e^2-1}e^{x} + \frac{e^2-e}{e^2-1}e^{-x}.$$