

# Analisi Matematica A e B

## Prova scritta n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2021/22  
Università di Pisa

12 luglio 2022

1. Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\alpha \cdot (x - \sin x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}}$$

2. (a) Mostrare che la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = e^x + x^5 - x^3 + 3x$$

è strettamente crescente.

- (b) Verificare che per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'equazione

$$f(x) = \lambda \tag{1}$$

ha una e una sola soluzione.

- (c) Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione che associa ad ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  la corrispondente soluzione di (1). Dimostrare che  $g$  è derivabile e calcolare  $g'(1)$ .

3. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$u'' - 2u' + u = \frac{e^x}{x^4} + \sin x.$$