ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 46 - 29.1.2021

Criteri di monotonia

$f : I \to \mathbb{R}$ I intervallo

J = "parte interna" di I

$J = (\inf I, \sup I)$

f continua su I, derivabile su J

1. $\forall x \in J \quad f'(x) \geq 0 \iff f$ crescente su I
2. $\leq 0 \iff$ decrescente
3. $= 0 \iff$ costante
4. $\forall x \in J \quad f'(x) > 0 \implies f$ strett. crescente su I
5. $< 0 \implies f$ strett. decrescente su I

dim "$\Leftarrow$" con la definizione di derivata e permanenza del segno

f crescente (decrescente) allora

$$\begin{cases} x < x_0 \implies f(x) \leq f(x_0) \quad (\geq) \\ x > x_0 \implies f(x) \geq f(x_0) \quad (\leq) \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (\leq)$$

per $x \to x_0$ $\quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ $\leq$

(Non importa che I sia un intervallo)

"$\Leftarrow$" Si usa Lagrange costante (3)

per dimostrare che f è crescente (1)

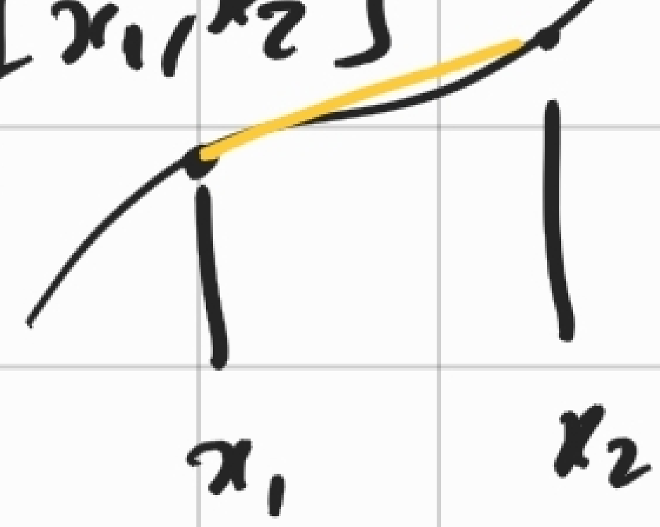
devo mostrare che se strett. crescente (4)

(*) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $<$

$[x_1, x_2] \subseteq I$ perché I intervallo

Lagrange su $[x_1, x_2]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x) \geq 0 \quad (1) \qquad > 0$$



con $x \in (x_1, x_2) \subseteq J$

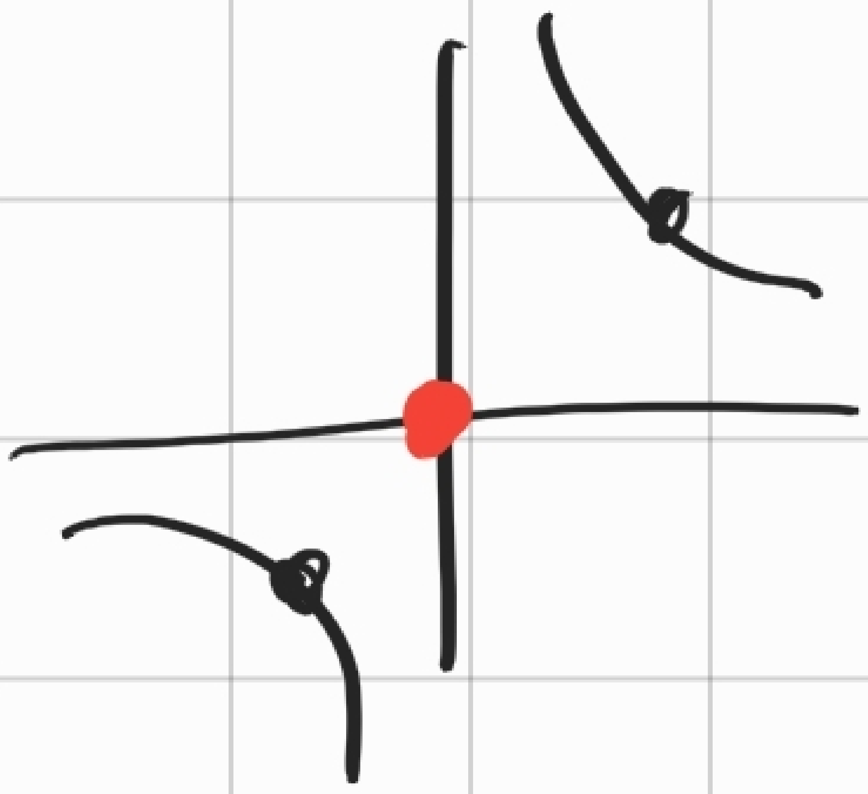
$\longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ $>$ $\square$

È importante che I sia un intervallo
(per le implicazioni: $\Rightarrow$)

Esempio $\quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x$

ma f non è decrescente.

$f(-1) = -1 \qquad f(1) = 1$



$f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

il dominio non è un intervallo:

Ma si può applicare il criterio separatamente ai due intervalli:

f è strett. decrescente su $(-\infty,0)$ e su $(0,+\infty)$

$\square$

Esempio

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x$$

$$f'(x)=\frac{-1/x^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

$f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

f è costante su $(0, +\infty)$

e su $(-\infty, 0)$

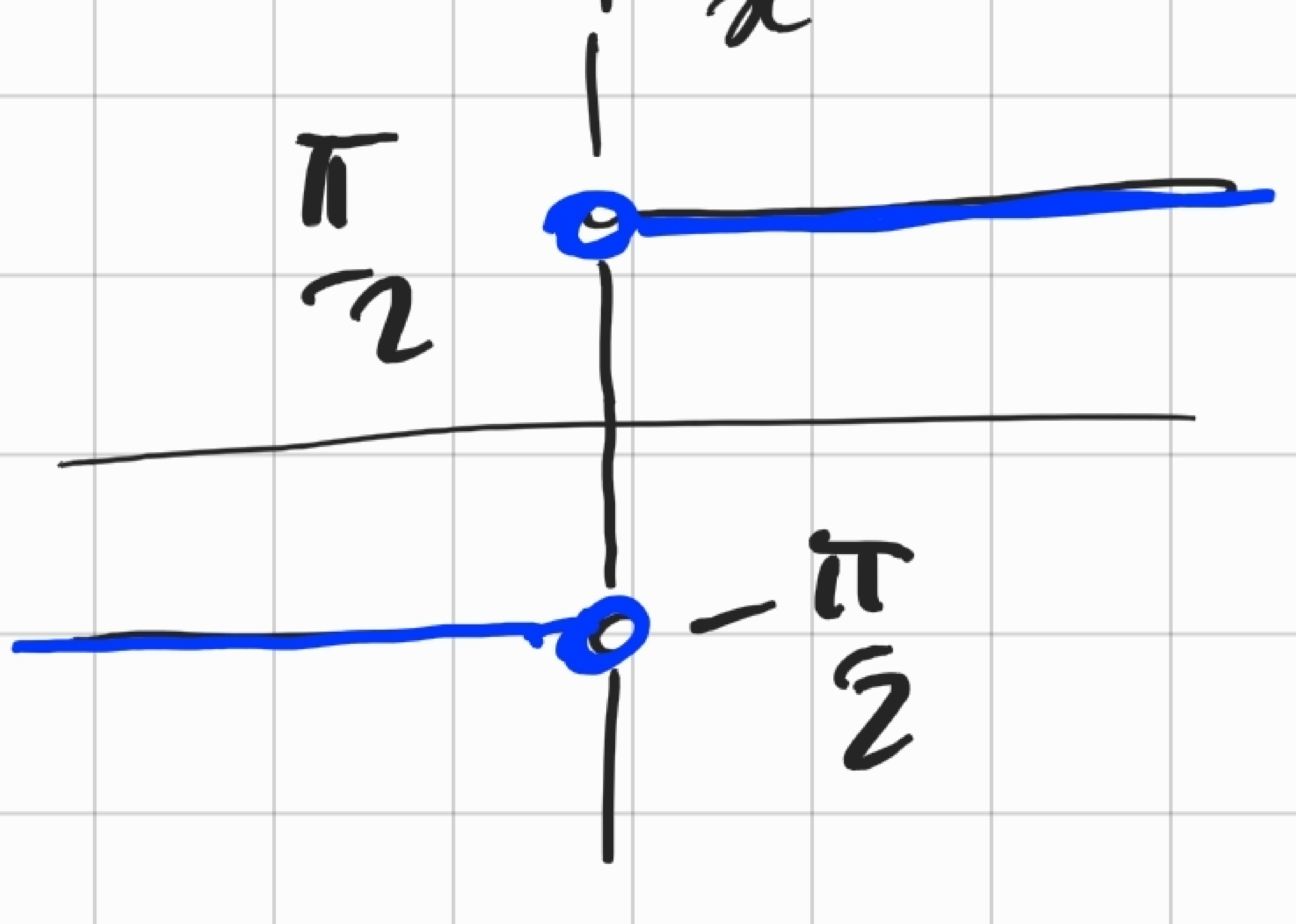
$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{se } x > 0 \\ c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$c_1 = f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

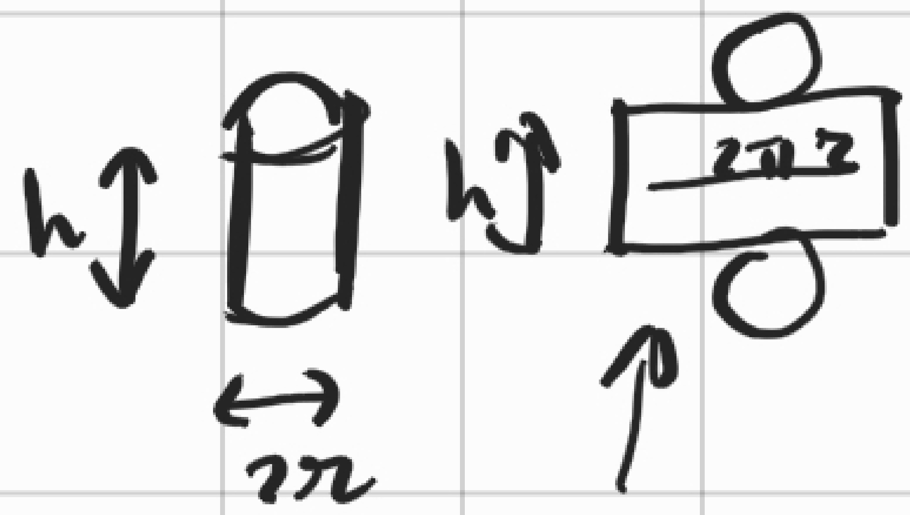
$$c_2 = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$\square$

Problemi di ottimizzazione

Esempio 

cilindro di altezza h e raggio r

→ Con volume: $330\ cm^3$

Con superficie totale S minima.

$$V_0 = \pi r^2 \cdot h = 330\ cm^3 \qquad \boxed{h = \frac{V_0}{\pi r^2}}$$

$$S = 2\pi r^2 + h \cdot 2\pi r = 2\pi\left[r^2 + hr\right]$$

$$S = S(r) = 2\pi\left[r^2 + \frac{V_0}{\pi r^{\cancel{2}}}\cancel{r}\right] = \underbrace{2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}}$$

$S \to$ min.

cerco i punti critici

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V_0}{r^2} = 0$$

$$S : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$S'(r) = 0 \qquad 4\pi r = \frac{2V_0}{r^2}$$

$$4\pi r^3 = 2V_0$$

$$r^3 = \frac{2V_0}{4\pi} = \frac{V_0}{2\pi}$$

$r = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}$ è l'unico punto critico.

Se c'è un minimo è il punto critico.

C'è un minimo?

Studiamo il segno della derivata.

$$S'(r) \gtreqless 0 \iff 4\pi r \gtreqless \frac{2V_0}{r^2}$$

$$\iff r^3 \gtreqless \frac{V_0}{2\pi} \iff r \gtreqless \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$$

Tabella dei segni:

	0		$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$	
S'	$\nexists$	$-$	0	$+$
S	$\nexists$	↘	min	↗
		strett. decrescente		strett. crescente

Fatti che doremo per scontati:

(1) $S' < 0$ su $(0, r_0) = J$

S è continua su $(0, r_0] = I$

S è strettamente decrescente su $(0, r_0]$.

Analogamente $S' > 0$ su $(r_0, +\infty)$

S è continua su $[r_0, +\infty)$

$\Rightarrow$ S è strett. crescente su tutto $[r_0, +\infty)$

(2) r_0 è minimo su tutto $(0, +\infty)$

in quanto:

S decrescente su $(0, r_0]$

se $x \leq r_0 \Rightarrow f(x) \geq f(r_0)$

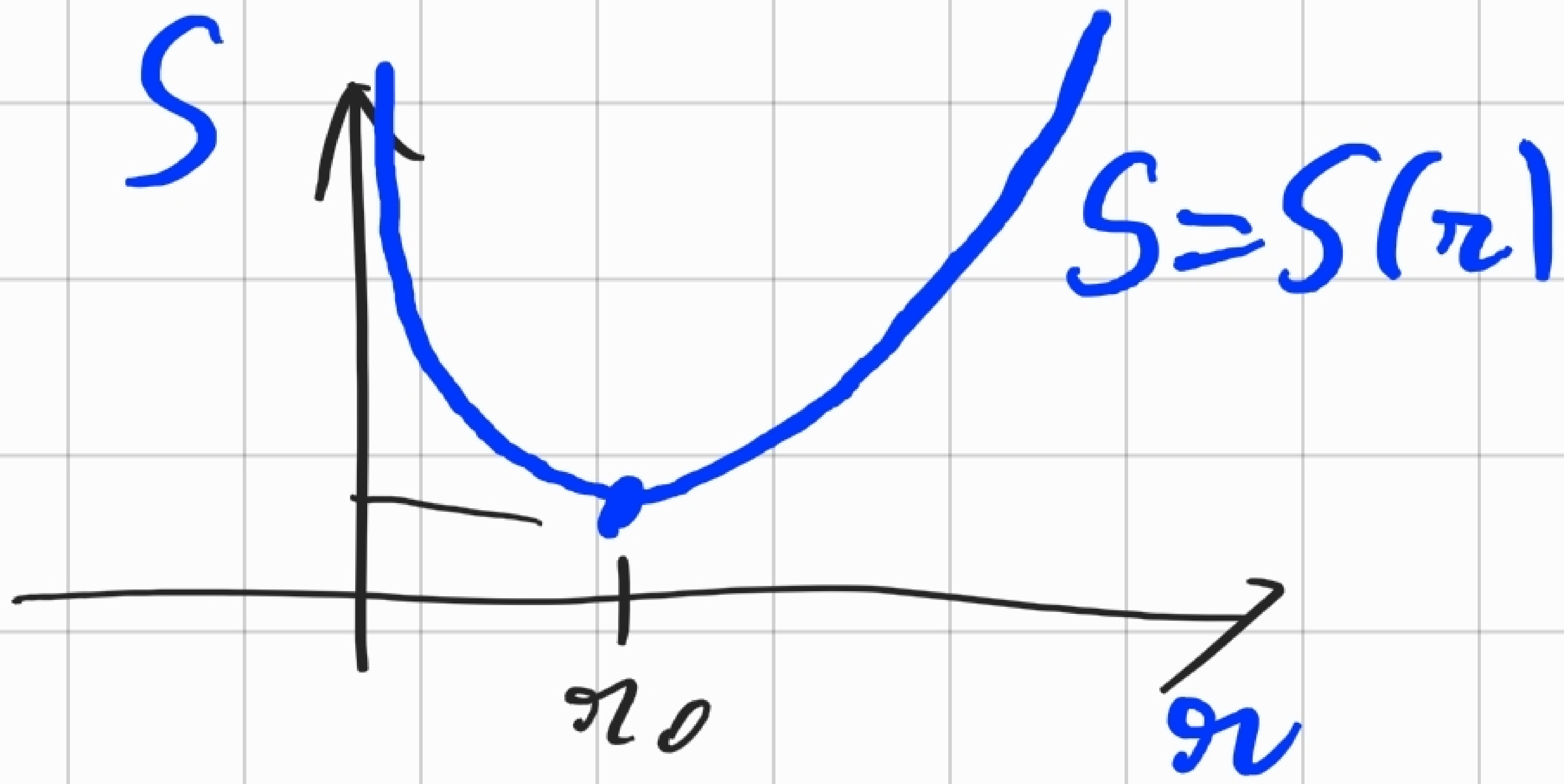
S crescente su $[r_0, +\infty)$

se $x \geq r_0 \Rightarrow f(x) \geq f(r_0)$

$\forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(r_0)$

$\Rightarrow f(r_0)$ è minimo di f su tutto $(0, +\infty)$

$\Rightarrow r_0$ è un punto di minimo assoluto per $S(r)$.



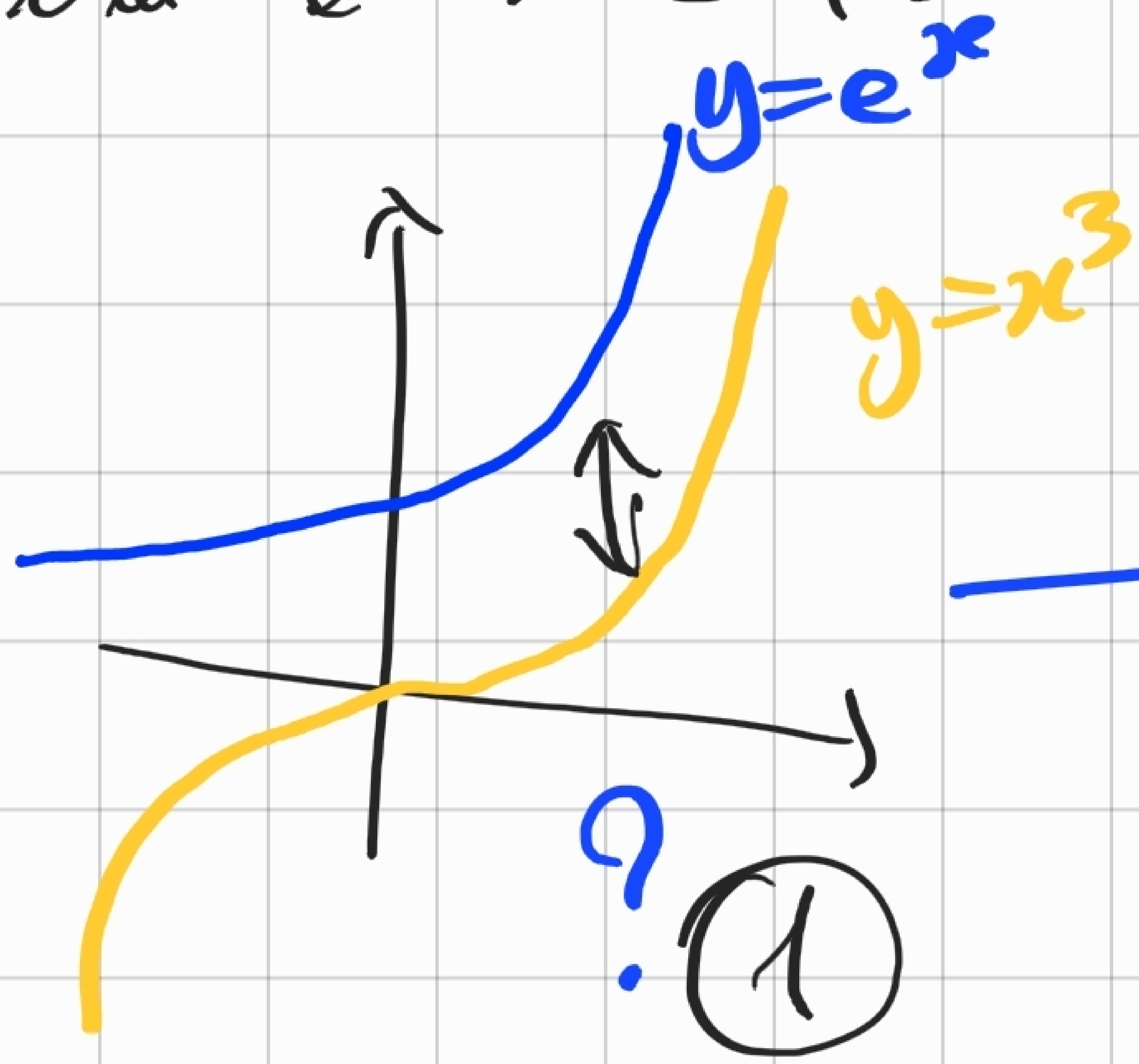
$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{330\ cm^3}{2\pi}}$$

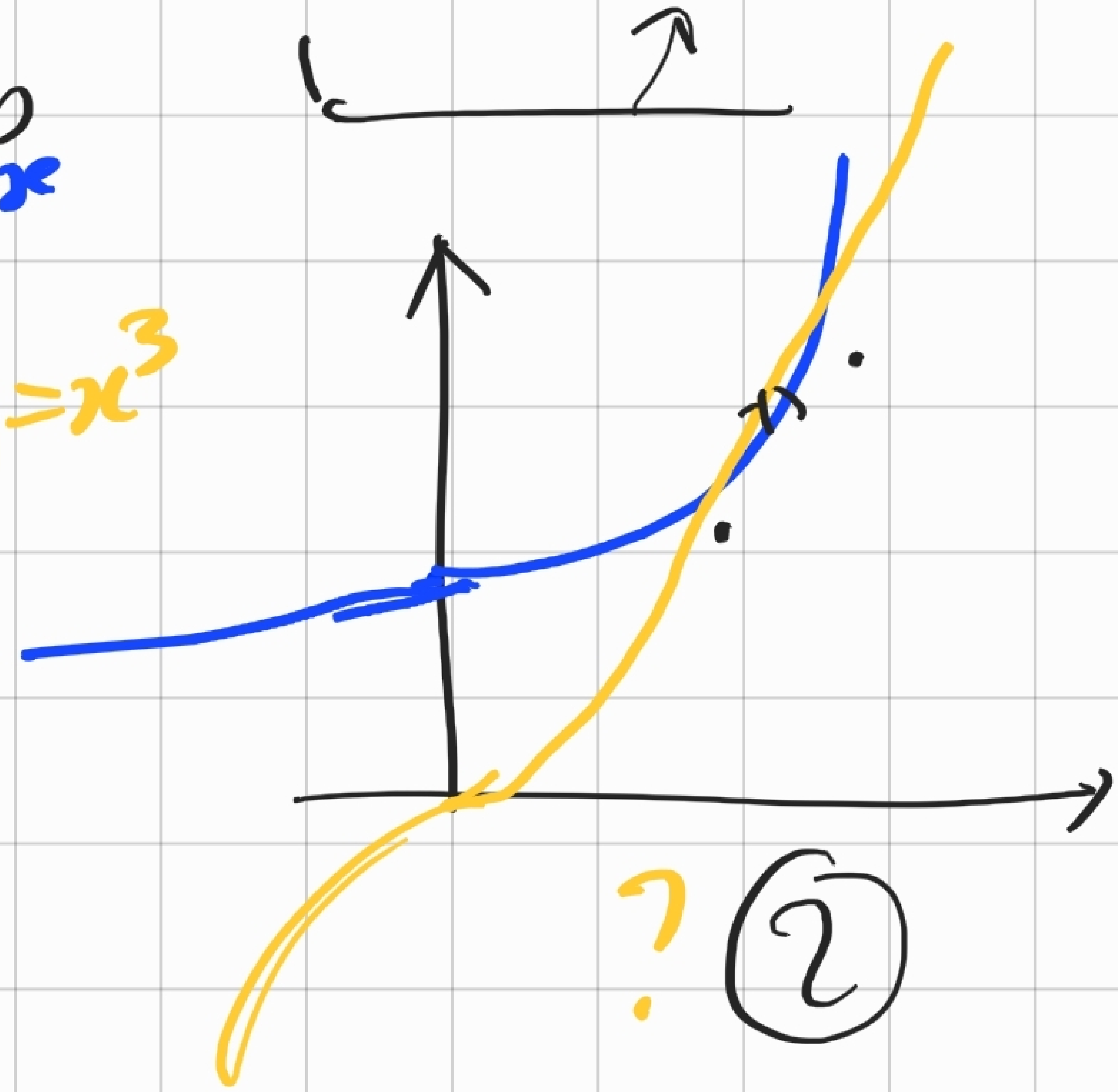
$\simeq 3{,}74$ cm $\square$

Risolvere una equazione

<u>Esempio</u> "Risolvere" $e^x = x^3$

$\lim e^x - x^3 = +\infty$





ha soluzione?

<u>Studiare</u> $f(x) = e^x - x^3$

<u>ma</u> $e^x = x^3 \iff x = \ln x^3$

$x = 3\ln x$

È più facile studiare:

$\longrightarrow f(x) = x - 3\ln x.$

Le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione f.

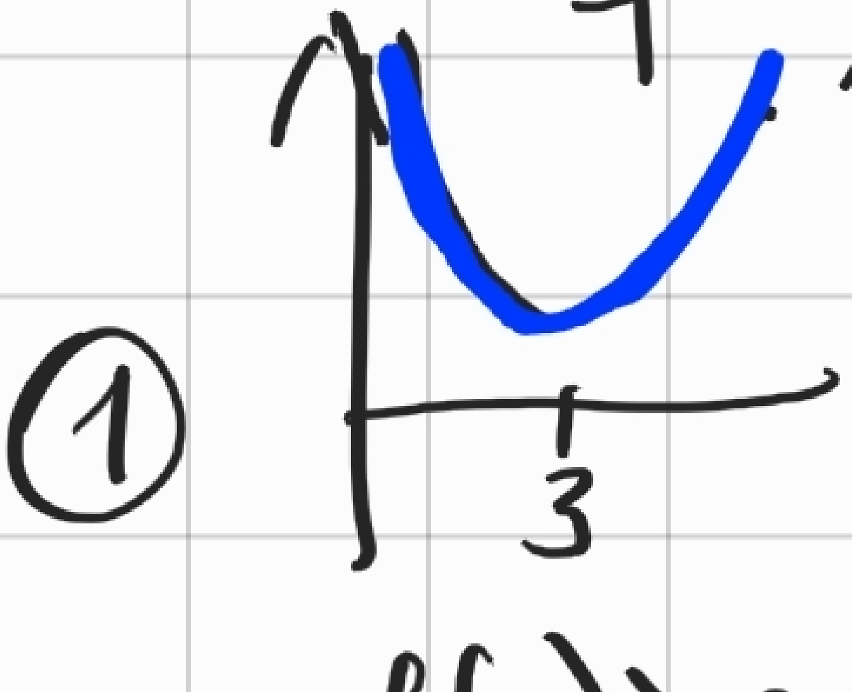
La derivata semplifica la funzione.
Studio prima il segno della derivata.

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x} > 0 \qquad 1 > \frac{3}{x}$$

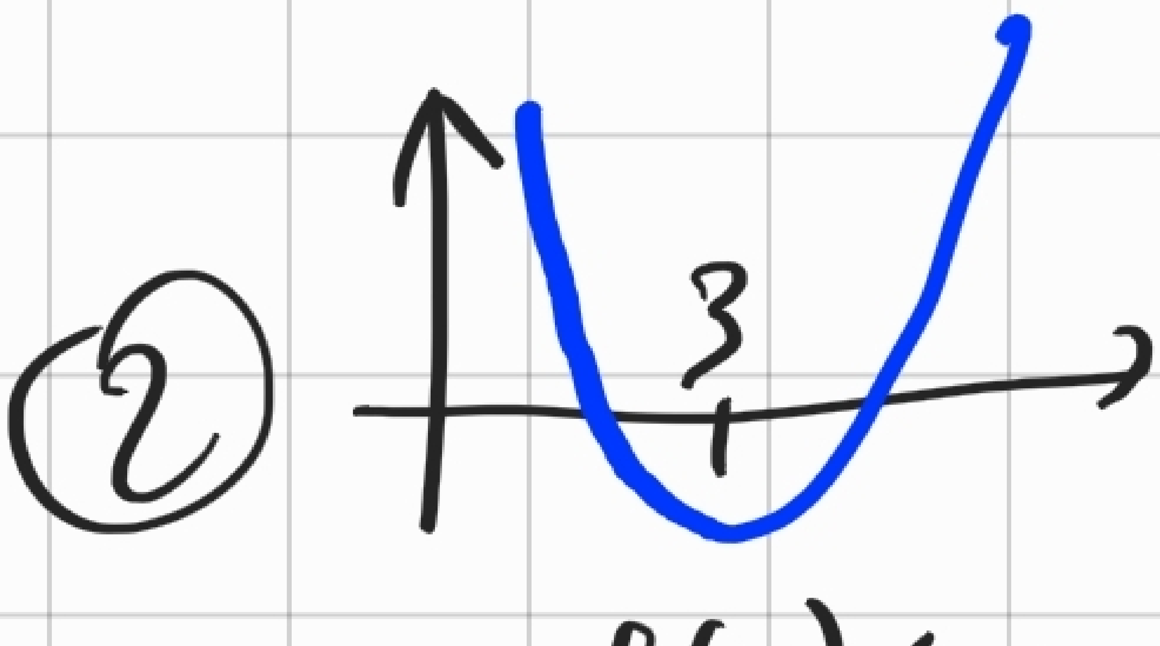
$$\left(f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x > 0 \right)$$

$$f'(x) > 0 \iff x > 3$$

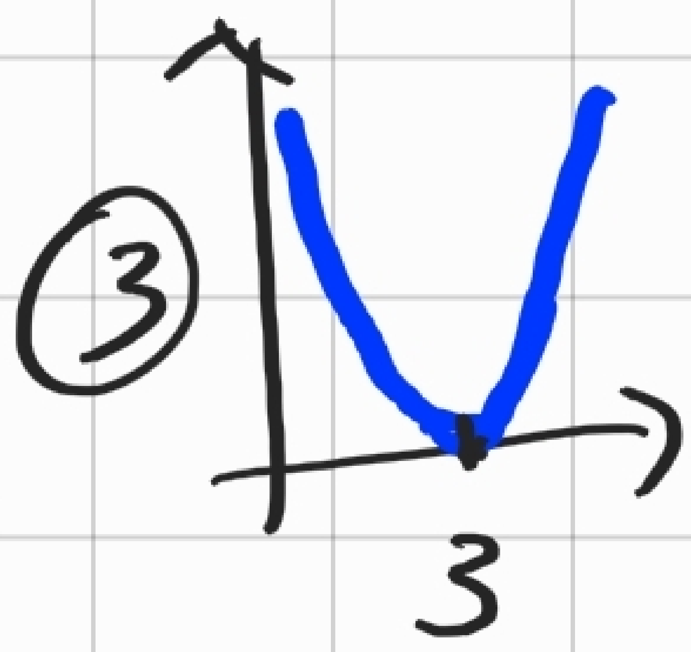
	0		3	
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$



$f(3) > 0$



$f(3) < 0$



$f(3) = 0$

Per capire se sono in 1 2 o 3 basta calcolare $f(3)$.

$$f(3) = 3 - 3\ln 3 = 3(1-\ln 3) < 0$$

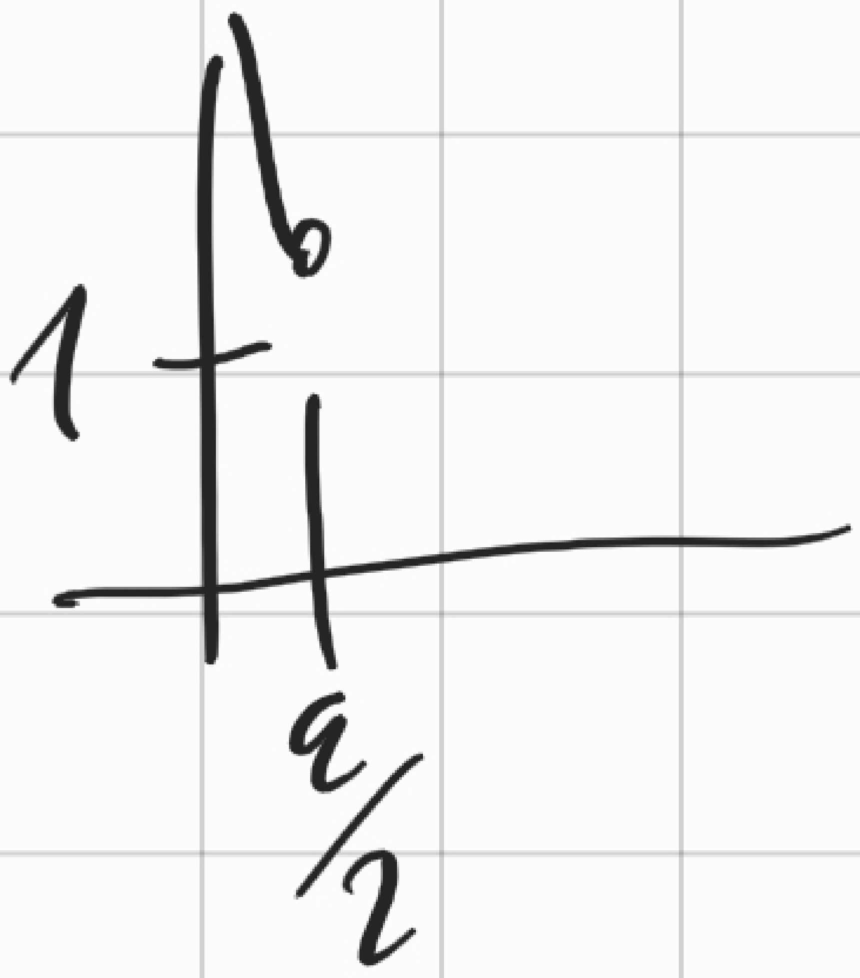
$$\ln 3 > \ln e = 1$$

f è strett. decrescente in $(0,3]$

f è iniettiva $\Rightarrow$ $f(x)=0$ ha al più una soluzione $x\in(0,3]$

$f(3)<0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad \exists\ \varepsilon\in(0,3)$ tale che $\forall x<\varepsilon$ $f(x)>1$



$f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$

$f : \left[\frac{\varepsilon}{2}, 3\right] \to \mathbb{R}$

f è continua

$f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$, $f(3) < 0$

$\Rightarrow$ applico il teorema degli

zeri $\Rightarrow$ $f(x)=0$ ha

almeno una soluzione $x \in (0,3]$

$\Rightarrow \exists!\, x_1 \in (0,3]$ tale che $f(x_1)=0$

Quanto vale x_1 ?

$$x_1 \overset{?}{>} 1$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < f(1)$$

$$f(1) = 1 - 3\ln 1$$

$$= 1 > 0 \quad \Rightarrow x_1 > 1$$

$x_1 < 2$ infatti:

$$f(2) = 2 - 3\ln 2 < 0$$

$$2 < 3\ln 2$$

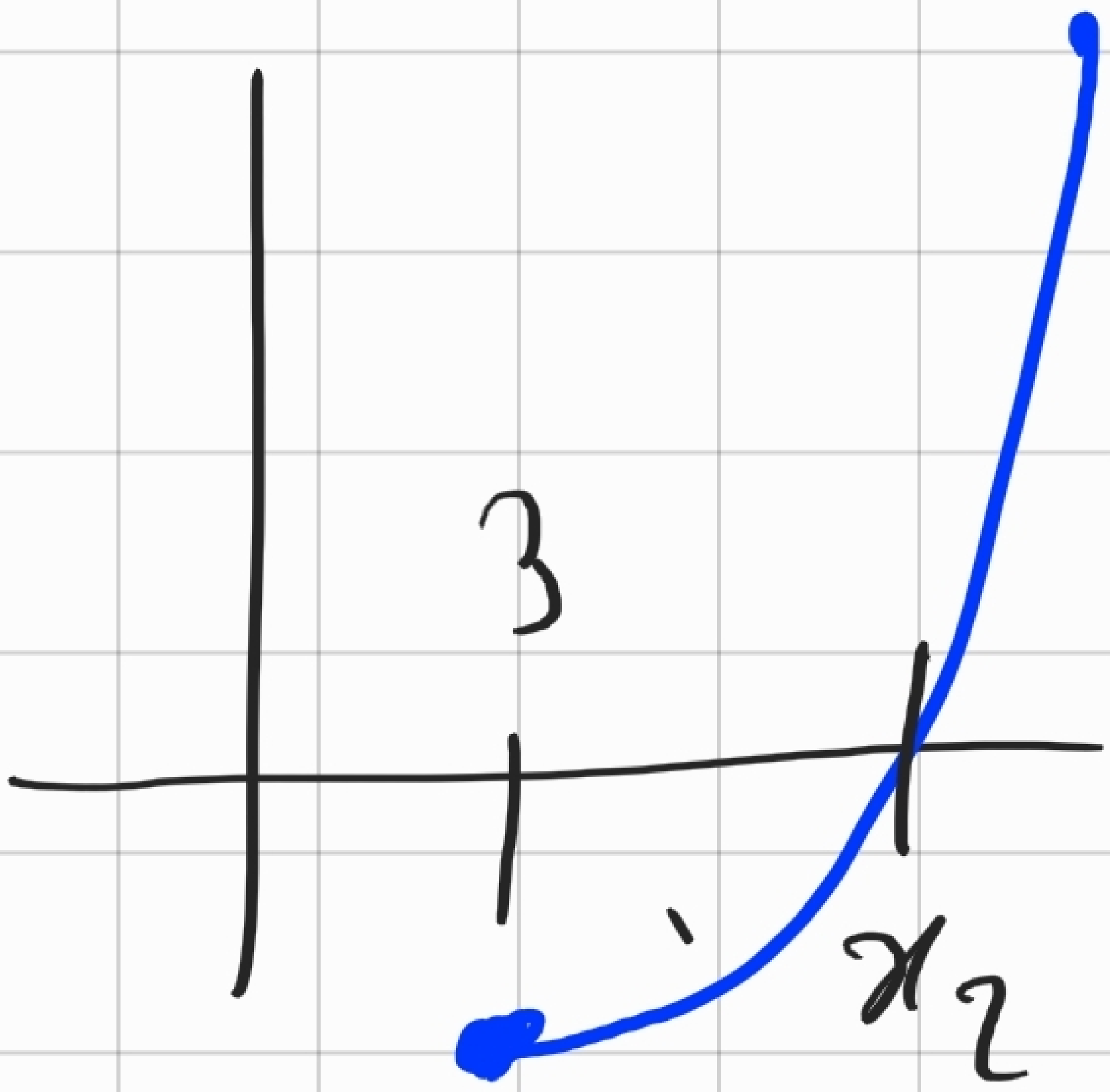
$$2 < \ln 8$$

$$e^2 < 8$$

5

$$\sim 7{,}39 < 8$$

per $x > 3$:



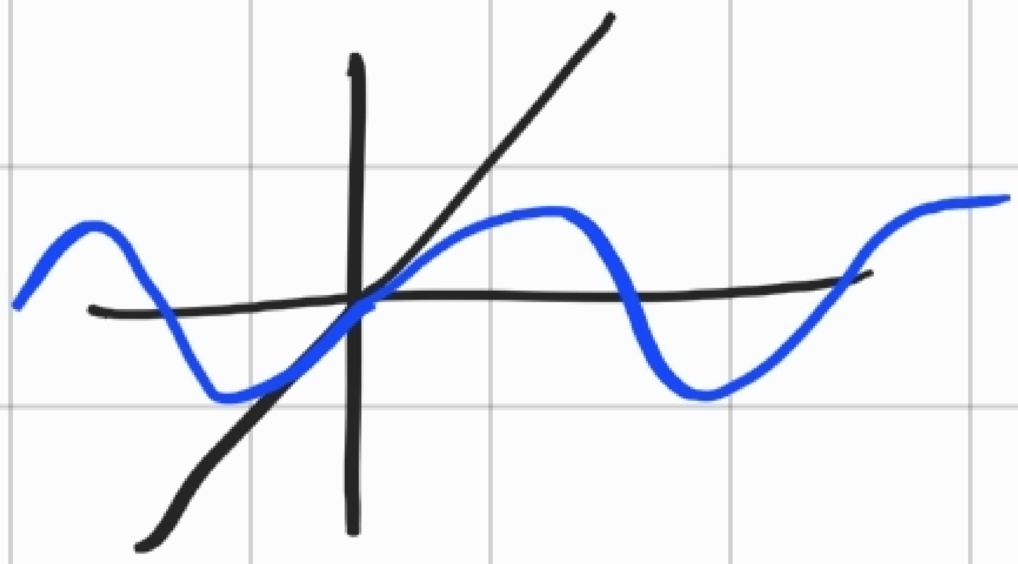
$\exists!\ x_2 \in [3, +\infty)$ t.c. $f(x_2) = 0$

....

Esercizio 3 dimostrare che

$$\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

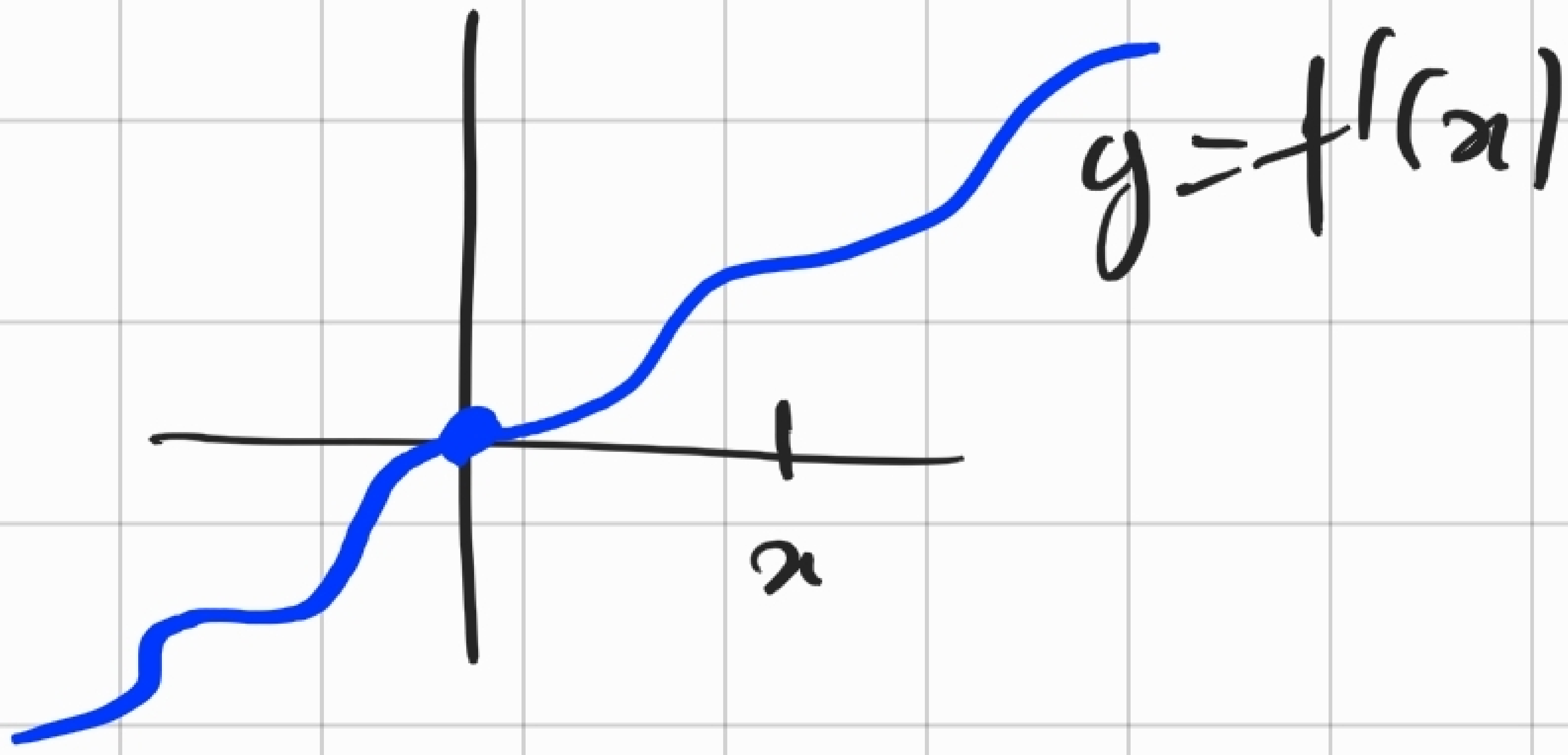
$$f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2} \overset{?}{\geq} 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$



$$f'(x)=-\sin x+x$$

$$f''(x)=-\cos x+1\geq 0$$

f' crescente $\qquad f'(0)=0$



$f'(x)\geq 0$ se $x\geq 0$

$f'(x)\leq 0$ se $x\leq 0$

		0	
f''	≥ 0	≥ 0	≥ 0
f'	≤ 0	0	≥ 0
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

f decrescente su $(-\infty, 0]$

crescente su $[0, +\infty)$

0 è un punto di minimo assoluto per f.

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(0) = 0$$

$$\forall x. \qquad \square$$

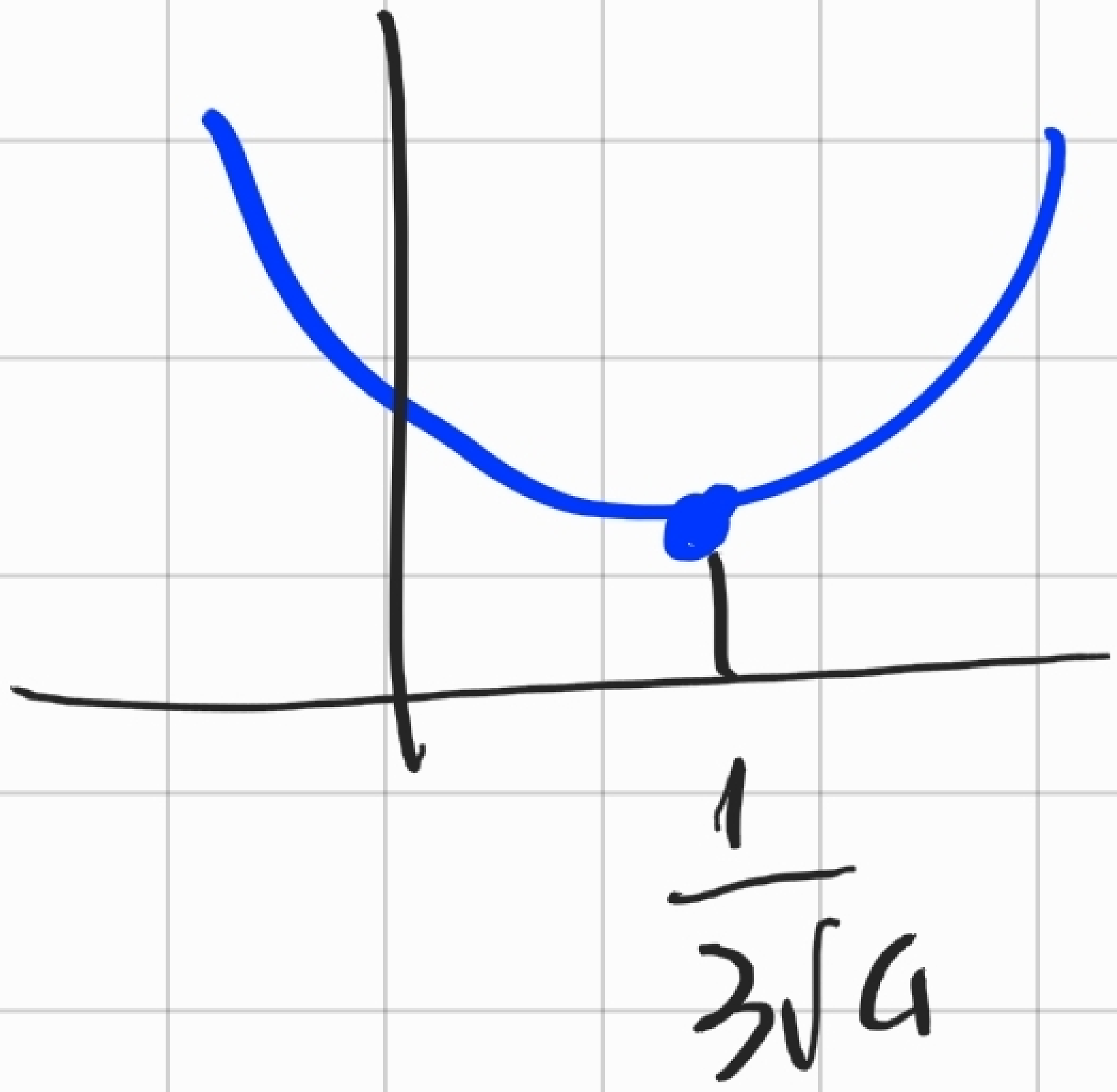
Esercizio Dimostrare:

$$f(x) = x^4 - x + 3 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 1$$

$$f'(x) = 0 \iff x^3 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) \overset{?}{>} 0$$

$\square$