ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 18 - 4.11.2020

limite di funzione $\qquad f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

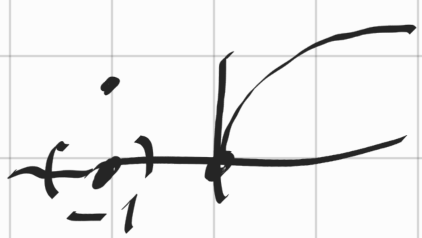
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

se $\underline{x_0 \in \mathbb{R}}$, $\ell \in \mathbb{R}$.

Cosa succede se esiste $\delta > 0$ tale che non esistono punti $x \in A \setminus \{x_0\}$ tali che $|x - x_0| < \delta$.

<u>Es</u> $\quad x_0 = -1, \qquad \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = ?$



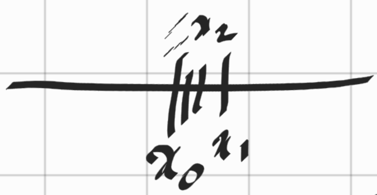
<u>Es</u> $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = -1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Def (punto di accumulazione)

Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, diremo che x_0 è **punto di accumulazione** per A

$\forall \delta > 0 : \quad (A \setminus \{x_0\}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \neq \emptyset$

$\Updownarrow$



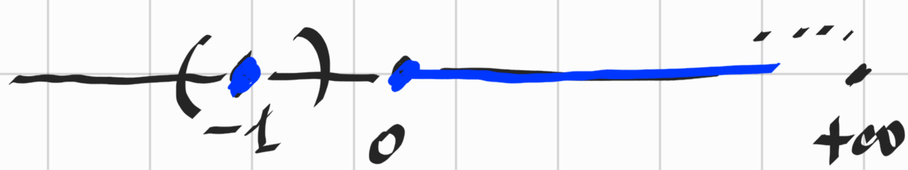
Definiamo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ solo se x_0 è un punto di accumulazione per il dominio di f.

Es $A = (0, +\infty)$ $\qquad f(x) = \log_2 x$

0 è punto di accumulazione

anche 1 lo è ...

Es $A = \{-1\} \cup [0, +\infty)$

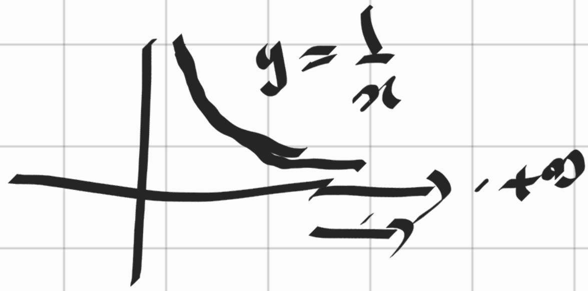


-1 non è di accumulazione perché scelto $\delta = \frac{1}{2} < 1$.

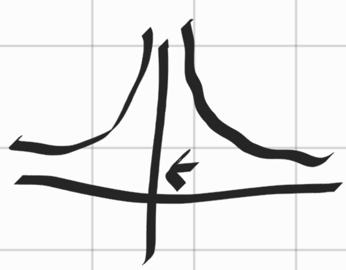
$$A \setminus \{-1\} = [0, +\infty)$$

$$(A \setminus \{-1\}) \cap (-1-\delta, -1+\delta) = \emptyset$$

Vorremmo includere $+\infty$ e $-\infty$ nei limiti.

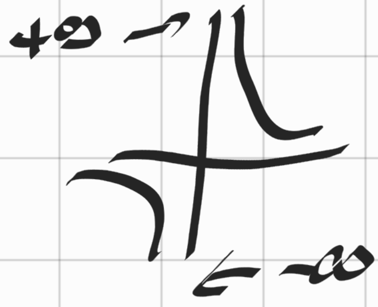


$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Non solo. Vorremmo anche fare limiti destri/sinistri



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

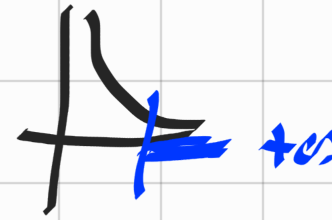
Ho 5 casi per $x \to x_0$
- $\mathbb{R}$
- x_0^+
- x_0^-
- $+\infty$
- $-\infty$

Ho 3 casi per l
- $\mathbb{R}$
- $+\infty$
- $-\infty$
- l^+
- l^-

15 casi diversi (25)

Per esempio

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Es: 

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \alpha\in\mathbb{R} : x>\alpha \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Es

$$\forall \alpha\in\mathbb{R} : \exists \delta>0 : 0<x<\delta \Rightarrow f(x)>\alpha$$

Definizione topologica di limite

Intorni

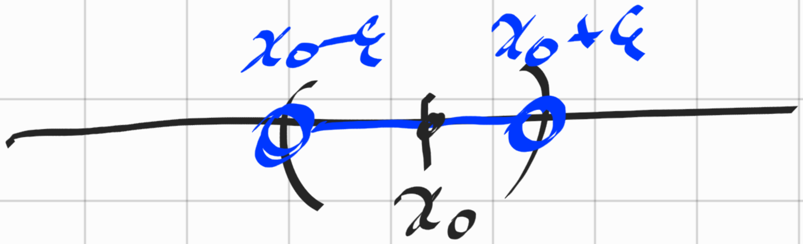
Se $x_0\in\mathbb{R}$

Gli intorni (basilari) di x_0 sono gli intervalli del tipo:

$$(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon) \quad \text{con } \varepsilon>0$$

$$\mathcal{B}_{x_0}=\{(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon) : \varepsilon>0\}$$

famiglia di tutti gli intorni basilari di x_0

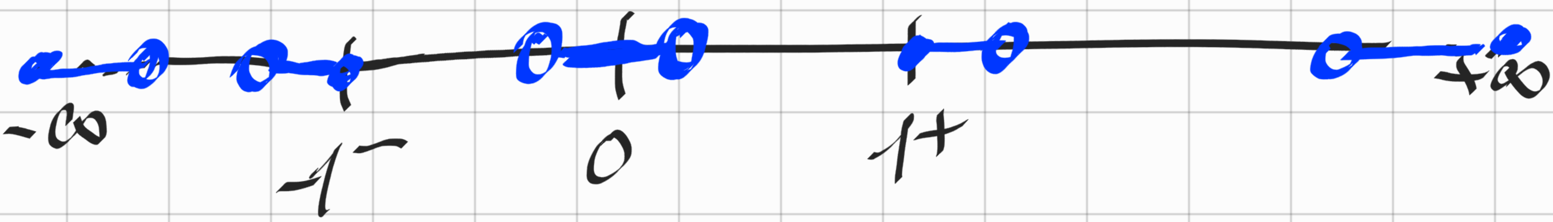


$$\mathcal{B}_{x_0^+} = \{ [x_0, x_0+\varepsilon) : \varepsilon > 0 \}$$

$$\mathcal{B}_{x_0^-} = \{ (x_0-\varepsilon, x_0] : \varepsilon > 0 \}$$

$$\mathcal{B}_{+\infty} = \{ (\alpha, +\infty] : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{B}_{-\infty} = \{ [-\infty, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \times \qquad \checkmark$$

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{B}_\ell \ \exists V \in \mathcal{B}_{x_0} : (x \neq x_0, x \in V) \Rightarrow f(x) \in U}$$

$|x - x_0| < \delta \iff x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon \iff f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$f(x) > \alpha \iff f(x) \in (\alpha, +\infty]$

$\mathcal{B}_{+\infty}$

es: $(10, +\infty] \in \mathcal{B}_{+\infty}$

Ad esempio

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$\forall x \in A$

α f

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{B}_{-\infty}\ \exists V \in \mathcal{B}_{1^-} : x \neq 1,\ x \in V \Rightarrow f(x) \in U}$$

$U = [-\infty, -\alpha)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$V = (1 - \delta, 1]$ $\quad \underline{\delta > 0}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : x \neq 1,\ 1-\delta < x \leq 1$

$$\Downarrow$$

$$f(x) < -\alpha$$

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : 1-\delta < x < 1 \Rightarrow f(x) < -\alpha}$$

Oss che ancora più concisamente

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{B}_\ell\ \exists V \in \mathcal{B}_{x_0} : f\left(A \setminus \{x_0\} \cap V\right) \subseteq U}$$

La continuità suona così:

$$\forall U \in \mathcal{B}_{f(x_0)} : \exists V \in \mathcal{B}_{x_0} : f(A \cap V) \subseteq U$$

⚠ tradurre la definizione astratta in alcuni dei 15 (o 25) casi possibile....

Es: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Così traduce:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists \beta \in \mathbb{R} : x > \beta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

Def (punto di accumulazione)

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (o x_0^+, x_0^-) Dato $A \subseteq \mathbb{R}$

Diciamo che x_0 è punto di accumulazione per A se

$$\forall V \in \mathcal{B}_{x_0} \quad A \setminus \{x_0\} \cap V \neq \emptyset$$

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$ ha senso solo quando esiste il limite è unico.

Si potrebbe anche scrivere

$$\boxed{f(x) \to l \quad \text{per } x \to x_0}$$

1 - non si esprime che il limite sia unico -

2 - È più concisa.

<u>ES</u> $\frac{1}{x} \to +\infty$ per $x \to 0^+$

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x} \to +\infty$$

$$\log_2 x \to -\infty$$

$$\sqrt{x} \to 0$$

Teorema (unicità del limite)

Se $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A (eventualmente destro/sinistro) se esistono $l_1, l_2 \in [-\infty, +\infty]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to l_1 \\ f(x) \to l_2 \end{array}\right\} \quad \text{per } x \to x_0$$

Allora $l_1 = l_2$.

dim Se per assurdo fosse $l_1 \neq l_2$ potrei trovare $U_1 \in \mathcal{B}_{l_1}$, $U_2 \in \mathcal{B}_{l_2}$ tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(Non sarebbe vero se $l_2 = l_1^+$)

Visto che $f(x) \to l_1$

$\exists V_1$ intorno di x_0

t.c. $f((A \setminus \{x_0\}) \cap V_1) \subseteq U_1$

Visto che $f(x) \to l_2$

$\exists V_2$ intorno di x_0

t.c. $f((A \setminus \{x_0\}) \cap V_2) \subseteq U_2$

$\underline{\underline{V}} = \underline{V_1} \cap \underline{V_2}$ è un intorno di x_0.

$$\underbrace{f((A \setminus \{x_0\}) \cap V)}_{\neq \emptyset} \subseteq U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

perché x_0 è punto di accumulazione □

Es $+\infty, -\infty$ sono gli unici punti di accumulazione per $\mathbb{Z}$.

perché: $\forall V \in \mathcal{B}_{+\infty}$

$$\mathbb{Z} \setminus \{+\infty\} = \mathbb{Z}$$

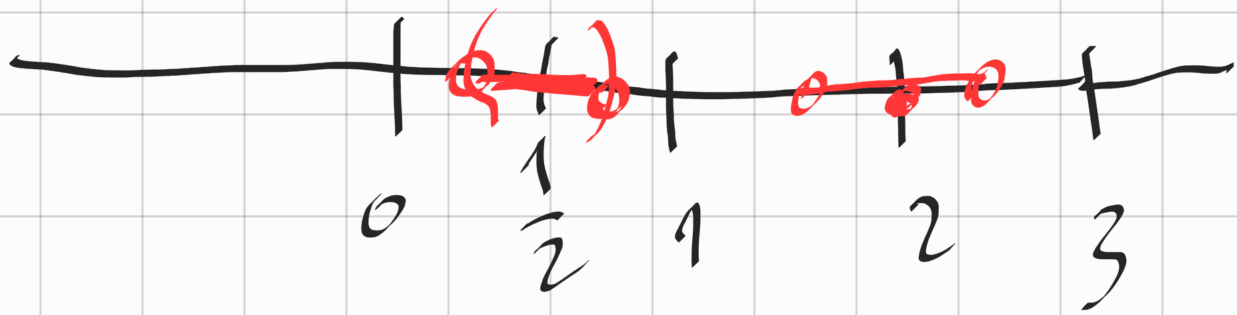
$$\mathbb{Z} \cap V \neq \emptyset$$

$$V = (\alpha, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{Z} : n > \alpha.$$

Archimede

$\frac{1}{2}$ è punto di accumulazione di $\mathbb{Z}$?



I punti di accumulazione di $\mathbb{Q}$ sono $[-\infty, +\infty]$

tutti

$\sqrt{2}$ è punto di accumulazione

$1{,}41 \qquad 1{,}4142$

$$\frac{\lfloor 10^d \sqrt{2} \rfloor}{10^d} \le \sqrt{2} \le \frac{\lceil 10^d \sqrt{2} \rceil}{10^d} \qquad \Bigg| \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists d : 10^{-d} < \varepsilon$$

$\mathbb{R}$

<u>ES</u> $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ c & \text{per } \underline{\underline{x = 0}} \end{cases}$

$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x)} = +\infty$