ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 15 - 28.10.2020

$\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq$ è un campo

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$(\mathbb{R}_+, \cdot)$ è un gruppo totalmente ordinato, denso, continuo.

Fissato $a > 1$ esiste un isomorfismo

$$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & a^0 = 1 \\ 1 & a & a^1 = a \end{array}$$

$$\# \quad \boxed{exp_a(x+y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y)}$$

exp_a è crescente

$$exp_a(x) = a^x$$

$$\# \quad \boxed{a^{x+y} = a^x \cdot a^y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(a^{b}\right)^{c} = a^{b\cdot c}$$

$$\left(a^{b}\right)^{x} = a^{b\cdot x} \qquad (*)$$

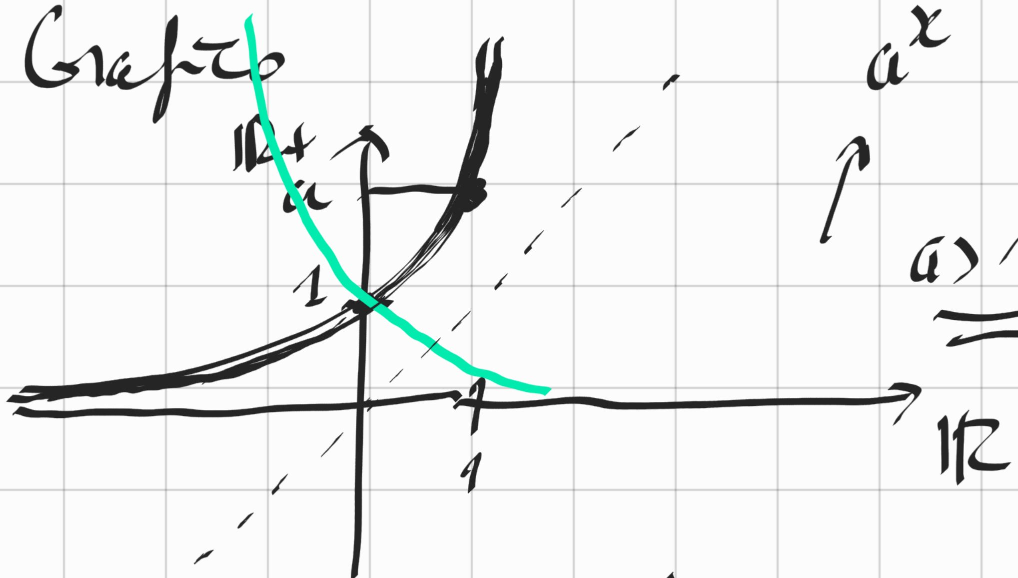
$$f(x) = a^{\underline{b\cdot x}}$$

Per dimostrare l'uguaglianza $(*)$ basta verificare che:

- $f(1) = a^{b}$ ✓
- $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ ✓
- $f(x)$ è monotona. ✓

$$f(x+y) = a^{b\cdot(x+y)} = a^{bx+by} = a^{bx}\,a^{by} = f(x)\cdot f(y).$$

Grafico



$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \qquad \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

Logaritmo

$exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bigettiva

l'inversa si chiama logaritmo:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \qquad a > 1$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\log_a} & \mathbb{R} \\ \cdot & & + \end{array}$$

$$\log_a(1) = 0$$

$\log_a$ è strett. crescente se $a > 1$.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$$

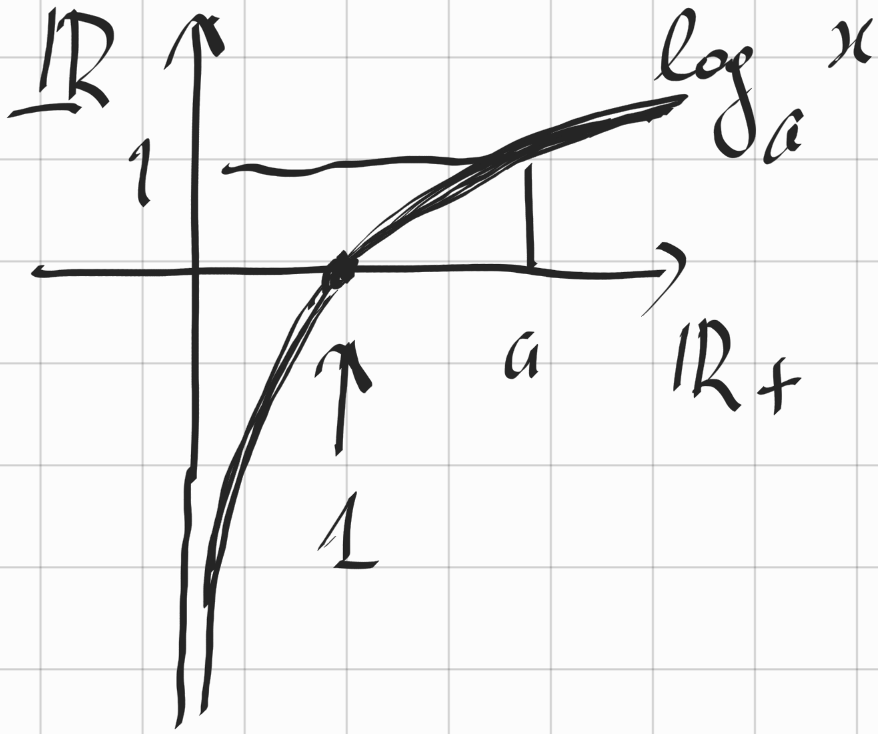
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \square$$

$$\Uparrow$$

$$(\log_b a)(\log_a x) = \log_b x$$

$\Nwarrow$ applico $\exp_b$

$$\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x$$



$a > 1$

Radice n-esima

x^n se $x>0$ ha due definizioni
$n \in \mathbb{N}$

1) prodotto ripetuto $\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}$

2) esponenziale di base x

Ma sappiamo che le due definizioni coincidono!

$\boxed{a^b}$ — se $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

(---- se $b \in \mathbb{Q}$, $a < 0$???)

— se $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

$x^n \qquad x > 0, \ n \in \mathbb{N}$

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{n \cdot \frac{1}{n}} = x^1 = x$$

$$\Rightarrow \underline{x^n = y} \iff x = y^{\frac{1}{n}}$$

diremo che x è la radice n-esima di y e scriveremo:

$$\Rightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

se $\underline{\underline{y > 0}}$ $\quad \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$

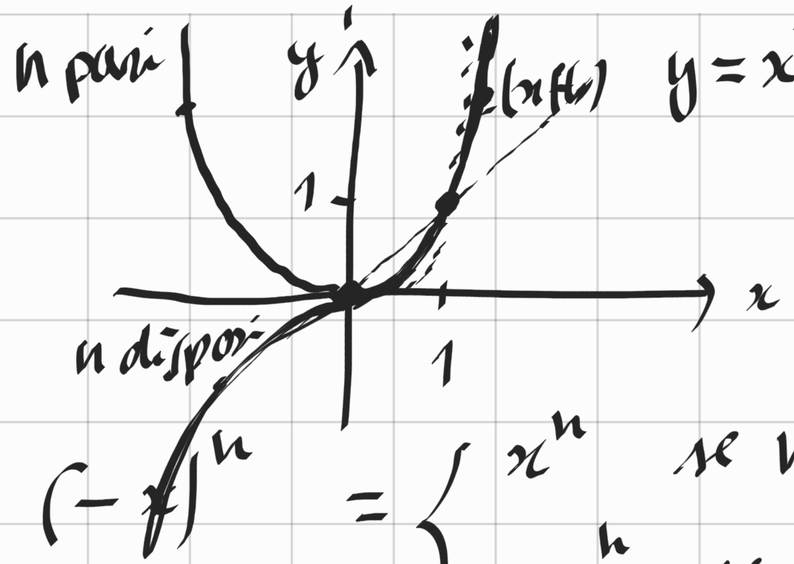
$(\mathbb{R}, +)$

$x \mapsto \frac{x}{3}$

$(\mathbb{R}_+, \cdot)$

$x \mapsto \sqrt[3]{x}$

Com'è il grafico di x^n



$y = x^n$ (penso $n=2$)

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{se } n \text{ pari} \\ -x^n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\left((-1)\cdot x\right)^n = (-1)^n \cdot x^n$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$f(x) = x^n$ se n <u>pari</u> $\quad f(-x) = f(x)$

si dice che la funzione è <u>pari</u>

$(x, f(x))$

$(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$

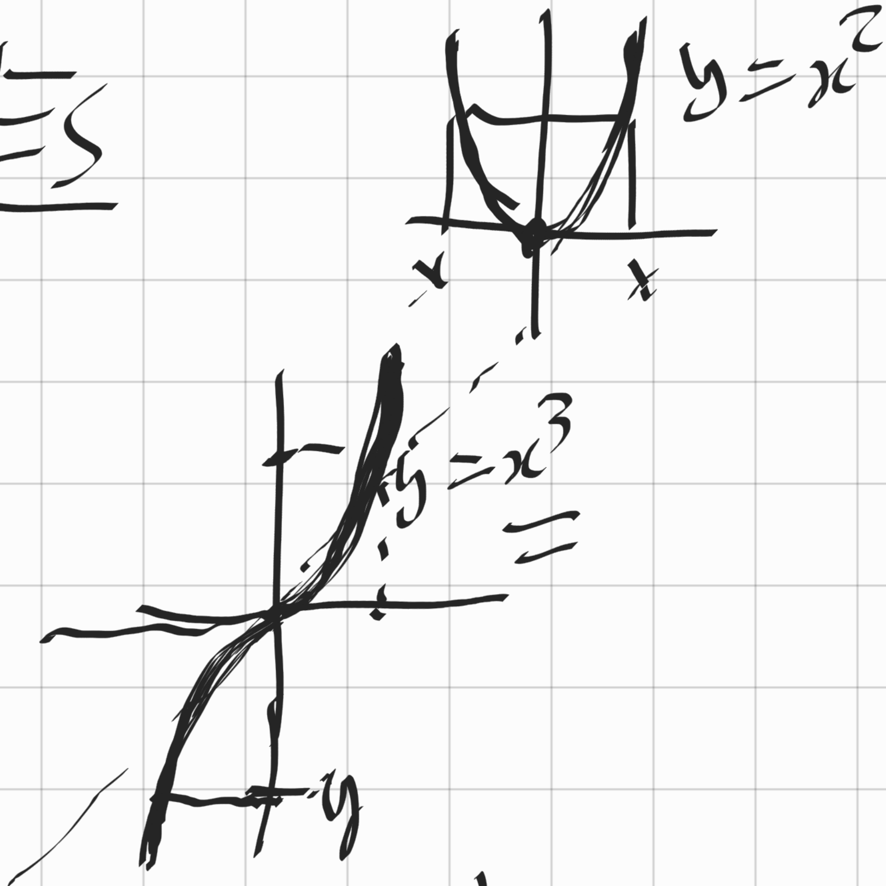
$f(x) = x^n$ se n <u>dispari</u> $\quad f(-x) = -f(x)$

$(x, f(x))$

$(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$

si dice che la funzione è <u>dispari</u>

Es



$f(x) = x^n \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è biiettiva se n dispari

ma non è né iniettiva
né suriettiva
se n è pari.

Risolviamo: $\boxed{x^n = y}$

Se $y > 0$ $y^{1/n}$ è una soluzione che chiamo $\sqrt[n]{y}$.

Se $y = 0$ 0 è soluzione quindi pongo $\sqrt[n]{0} = 0$.

Se $y < 0$:

Se n è pari non ho soluzioni.

$\sqrt[n]{y}$ è definita solo per $y \geq 0$ se n è pari ed è l'unica soluzione positiva di $x^n = y$.

Ma osserviamo che anche

$-\sqrt[n]{y}$ è soluzione.

Quindi (n pari):

$$x = \pm\sqrt[n]{y}.$$

Se $y < 0$ e n dispari

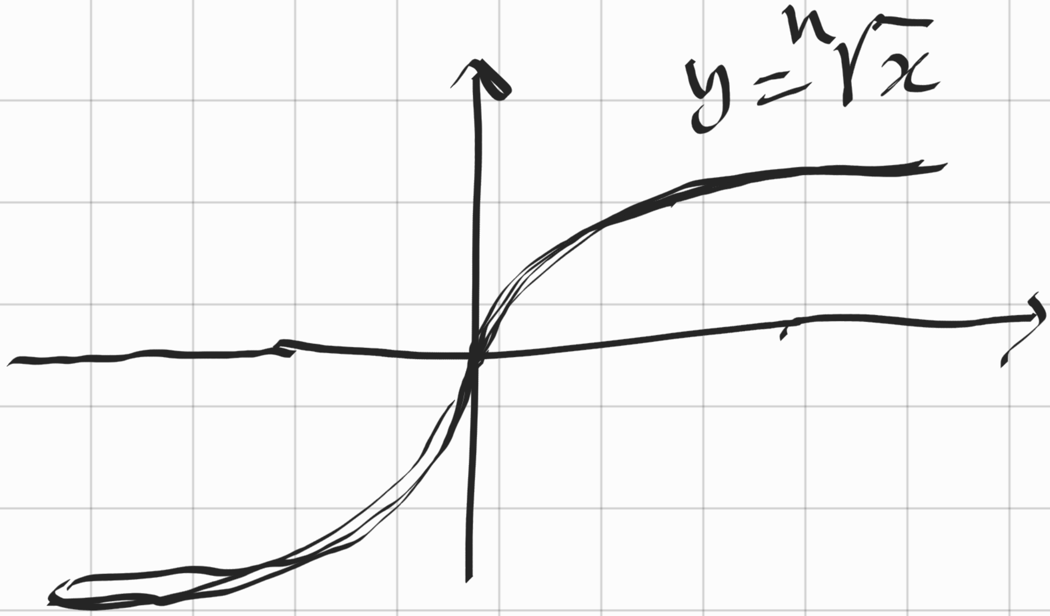
$$x^n = y$$

$$(-x)^n = -x^n = -y$$

$$-x = \sqrt[n]{-y} = (-y)^{\frac{1}{n}}$$

$$x = -(-y)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{y} = \begin{cases} y^{1/n} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \\ -(-y)^{1/n} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

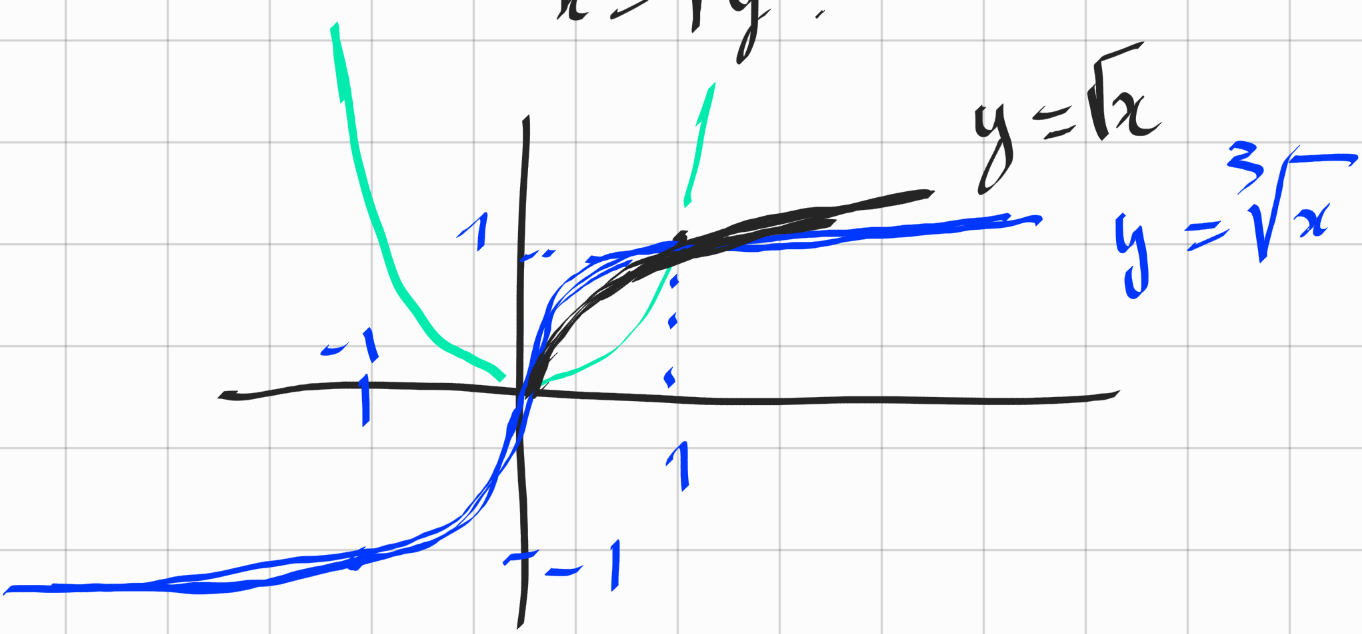


Se n dispari l'eq.

$$x^n = y$$

ha una unica soluzione

$$x = \sqrt[n]{y}.$$



$x = \sqrt{y}$ ~~radice algebrica $x^2 = y$~~

radice analitica,
sol. positiva di $x^2 = y$

La relazione $\boxed{x^2 = y}$
ha come inversa $(x = \sqrt{y}$ o $x = -\sqrt{y})$

Se $a > 0$

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

$p \in \mathbb{Z}$
$q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \sup\left\{ \frac{p \cdot m}{q} : \frac{p}{q} \leq x \right\}$$

Se usiamo $\cdot$ invece che $+$

$$f(x) = \sup\left\{ \sqrt[q]{m^p} : \frac{p}{q} \leq x \right\}$$

$\sqrt[q]{a^p}$ avrebbe senso

anche se $a<0$ quando

q dispari oppure p pari

In alcuni testi si dà

significato ad $\boxed{a^b}$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

anche quando $a<0$,

$b\in\mathbb{Q}$ $\quad b=\frac{p}{q}$ con q dispari

o p pari.

Noi tenderemo a non farlo.

Perché le regole delle potenze

non sarebbero più valide

Es $(x^2)^{\frac{1}{2}} = x^1 = x$ se $x>0$

ok

$(x^2)^{1/2} = -x$ se $x<0$

In generale $(x^2)^{1/2} = |x|$

$$\sqrt{x^2}$$

□

Qual è il dominio della funzione $\boxed{x^x}$?

(Non ha molto senso come domanda)

Per noi a^b è ben definito

se

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{N} & a^b = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{b \text{ volte}} \\ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad b \in \mathbb{Z} & a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \\ a > 0, \quad b \in \mathbb{R} & \end{cases}$$

$$a^b = \exp_a(b) \qquad D$$

$$f : \underset{*}{R} \to \underset{*}{S}$$

$$f(x \overset{R}{*} y) = f(x) \overset{S}{*} f(y)$$

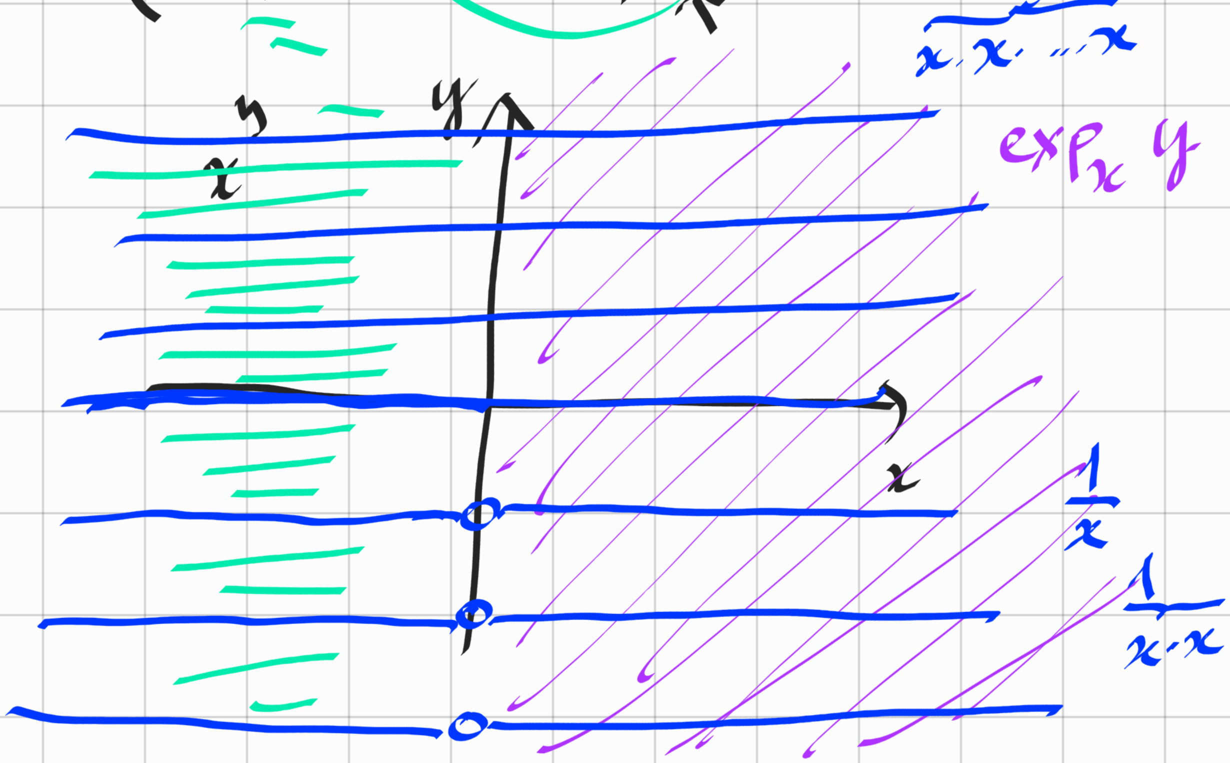
$$R = \mathbb{R}_+ \qquad \overset{R}{*} = \cdot$$

$$S = \mathbb{R} \qquad \overset{S}{*} = +$$

$$\boxed{f(x \cdot y) = f(x) + f(y)}$$

$(-2)^{4/8}$ non è definito $\qquad (-2)^{3/7} = -\sqrt[7]{8}$

$$(-2)^{4/7} = \sqrt[7]{(-2)^4} = \sqrt[7]{16}$$



$(-2)^{\sqrt{2}}$ certamente non ha senso.

$$(-2)^{3/7} = -\sqrt[7]{8} \quad \neq$$

$$(-2)^{6/14} = \sqrt[14]{(-2)^6} = \sqrt[14]{64} = \sqrt[7]{8}$$