ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 80
24.4.2020

Esempio di non unicità

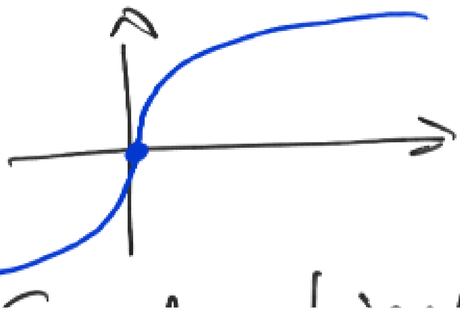
$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione locale unica

se f sia localmente

lipschitz rispetto a y
uniformemente rispetto a x

$$\boxed{u' = \sqrt[3]{u}} \qquad f(x,y) = \sqrt[3]{y}$$

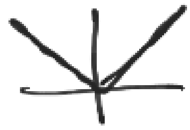


f non soddisfa le ipotesi
del

... teorema di Cauchy-Lipschitz.

(**Oss** Se $f \in C^1$ allora f soddisfa le ipotesi del teor. di Cauchy-Lipschitz).

(**Es** $f(y) = |y|$ è lipsch. $L = 1$. ma non è derivabile)



Baffo di Peano

$$(*)\begin{cases} u'(x) = \sqrt[3]{u(x)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Eq autonoma I ordine $\Rightarrow$ variabili separabili

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} = 1 \quad \text{se } u(x) \neq 0.$$

$u(x) = 0$ è soluzione

$$\int u^{-\frac{1}{3}}\, du = x + c$$

$$\frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} = x + c$$

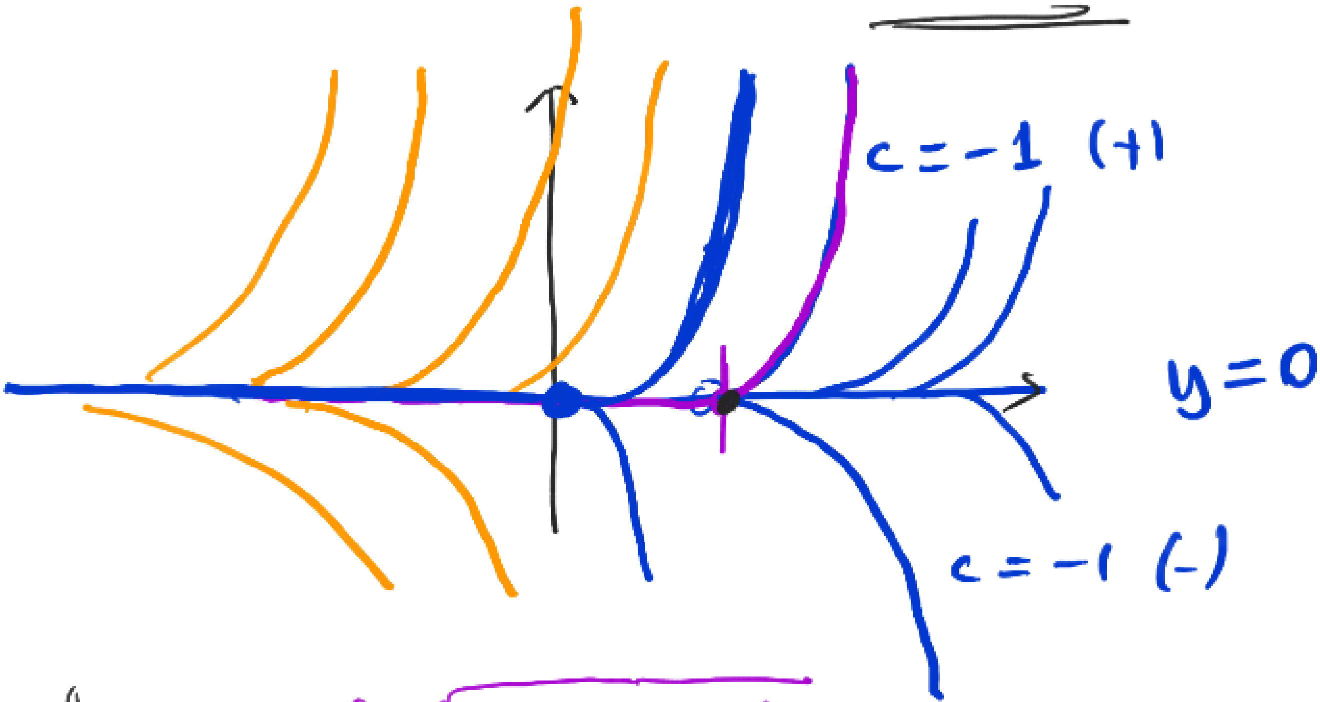
$\sqrt[3]{2} \quad 2(x+c)$ ← deve essere ...

$$\sqrt{u} = \frac{2}{3}(x+c) \geq 0 \quad \text{non negativo}$$

$$x \geq -c$$

$$u(x) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(x+c)\right)^3}$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2$$



$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^3} & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

u è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

$u'(1) = 0$ $\quad$ u è soluzione del pb. di Cauchy $\forall$

u' è continua $\Rightarrow u \in C^1$

ma $u \notin C^2$.

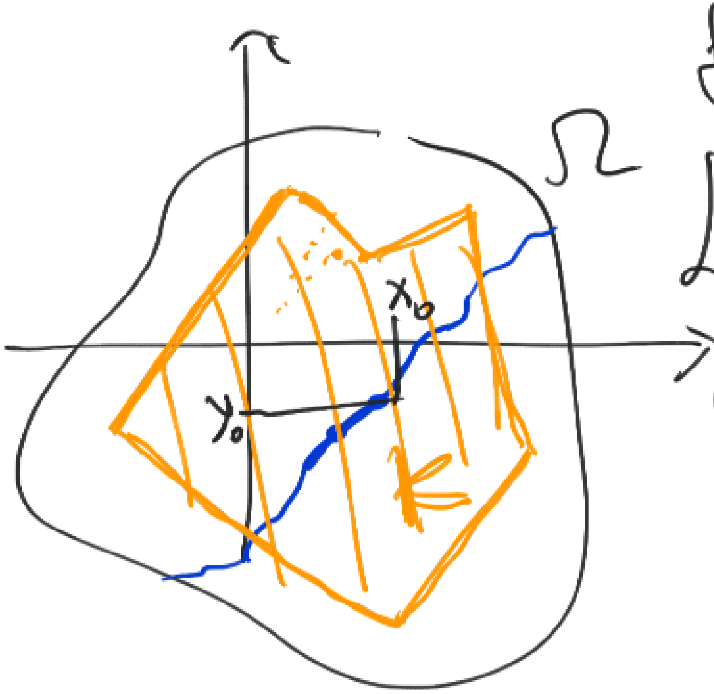
$u(x) = 0$ è soluzione di classe C^∞

$$u(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^3} \quad \text{per } x > 1$$

è di classe C^∞

ma non è massimale

Teorema (caratterizzazione delle soluzioni massimali)



$f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$(*) \begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

se f soddisfa le ipotesi di C-L

la soluzione di $(*)$ è massimale

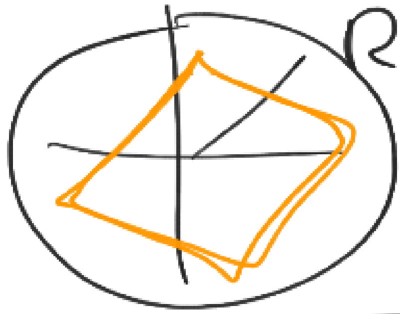
$\Longleftrightarrow$ $(x, u(x))$ esce da ogni compatto $K \subseteq \Omega$.

K compatto $= \begin{cases} K \text{ chiuso} \\ K \text{ limitato} \end{cases}$

K chiuso: $\quad \underline{p}_k \in K, \ \underline{p}_k \to \underline{p}$

allora $\underline{p} \in K$.

K limitato: se $\exists R \quad K \subseteq B_R$



Esistenza globale

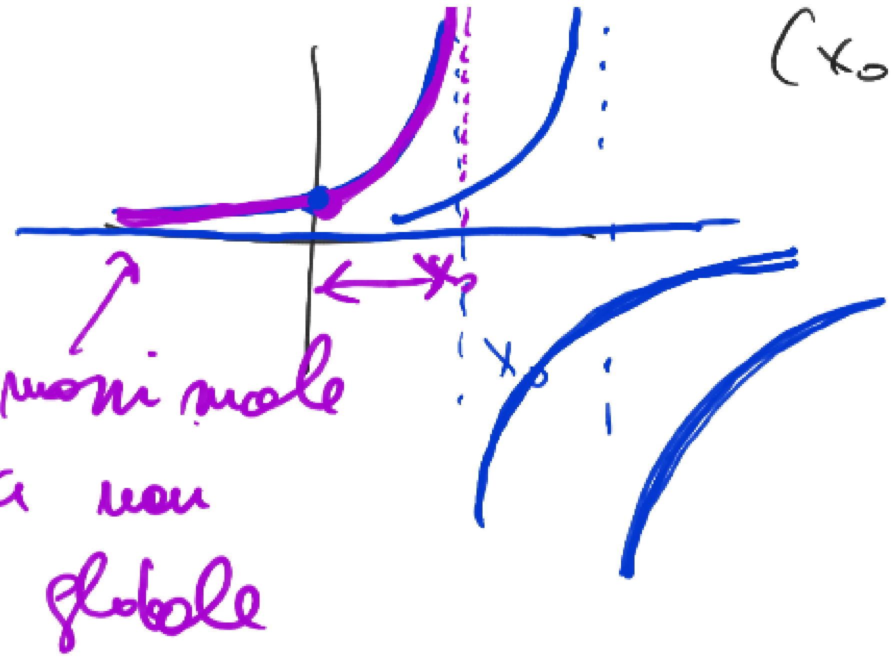
$\boxed{\Omega = \mathbb{R}^2}$

Es $\begin{cases} u'(x) = u^2(x) \\ u(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = y^2$

$\frac{u'}{u^2} = 1 \qquad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = x + c$

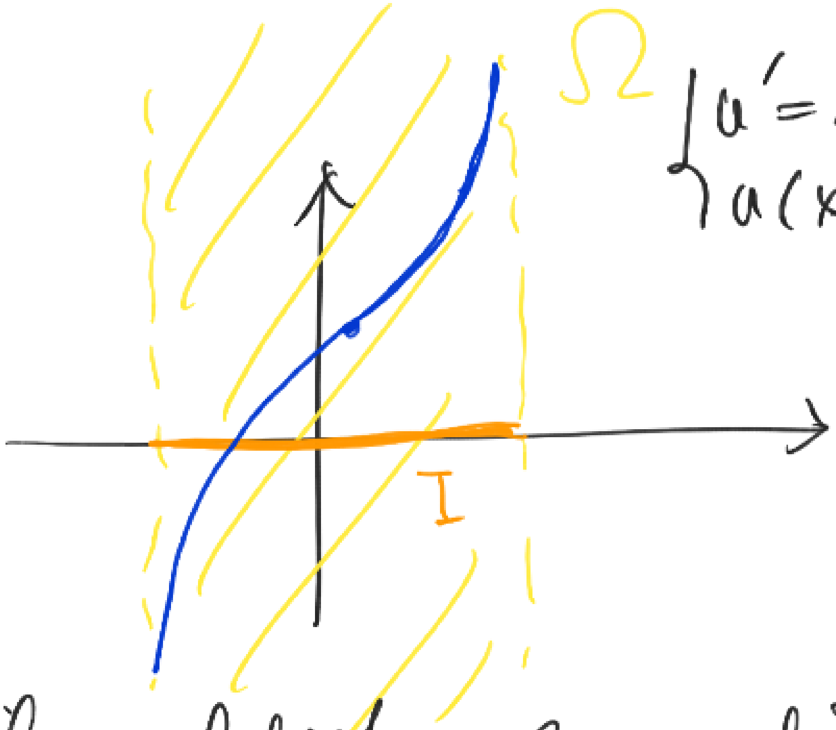
$\frac{1}{u} = -x - c \qquad u = \frac{1}{x_0 - x}$

$(x_0 = -C)$



Teorema (globale). I intervallo

Se $\Omega = I \times \mathbb{R}$ $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}$



$$\begin{cases} u' = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se f soddisfa le condizioni di C-L. e inoltre $\exists\, m, q$

(SUB-LINEARITÀ): $|f(x,y)| \leq m \cdot |y| + q$

$|u'(x)|$ $\forall\, x, y \in \Omega$.

Allora esiste (unica) una soluzione u definita su tutto l'intervallo I.

(si dice che la soluzione è globale).

---

idea della dimostrazione

$$u' = mu + q$$

ha soluzione esponenziale:

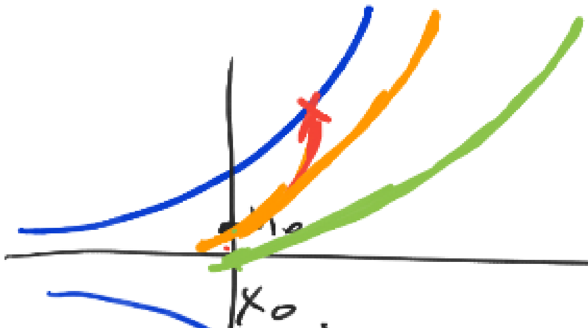
$$u' - mu = q$$

$$(u' - mu)\, e^{-mx} = q \cdot e^{-mx}$$

$$\left(u \cdot e^{-mx}\right)' = \left(-\frac{q}{m} e^{-mx}\right)'$$

$$u e^{-mx} = c - \frac{q}{m} e^{-mx}$$

$$u(x) = c e^{mx} - \frac{q}{m}$$



Le soluzioni, localmente, soddisfano

$$|u'(x)| \leq m\,|u(x)| + q$$

Tutto questo vale anche per i sistemi:

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

$$u : I \to \mathbb{R}^n$$

Quindi tutto vale anche per le eq. di ordine n

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = \underline{f}\left(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right) \\ \left.\begin{array}{l} u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{array}\right\} \underline{y} \end{cases}$$

$$\underline{v}(x) = \left(u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right)$$

$$\begin{cases} \underline{v}'(x) = \underline{g}\left(x, \underline{v}(x)\right) \\ \underline{v}(x_0) = \underline{y} \end{cases}$$

Eq. lineari di ordine n.

<u>Teorema</u> l'insieme delle soluzioni è uno spazio affine di dimensione n

di dimensione n

dim

$$(*)\begin{cases} u^{(n)}(x) = \overbrace{b + a_0 u + a_1 u' + \dots + a_n u^{(n-1)}}^{Lu} \\ \left.\begin{array}{l} u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \operatorname{Ker} L$$

$\underline{y} \overset{T}{\longmapsto} u$ soluzione di $(*)$

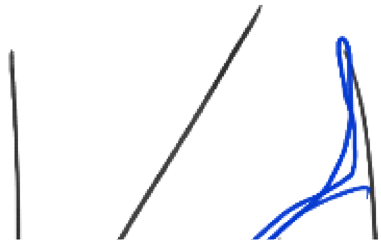
T è lineare.

è iniettiva per l'unicità

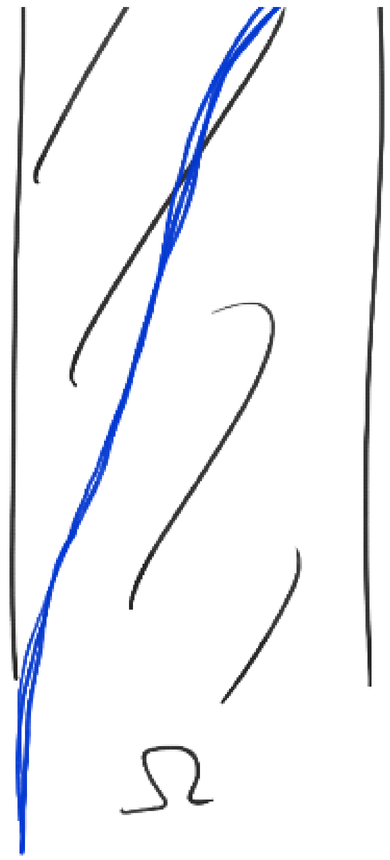
è suriettiva per l'esistenza

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\operatorname{Ker} L)$$

$\square$



$u' = f(x,u)$



$f : \Omega \to \mathbb{R}$

ES $\Omega = \mathbb{R}^2$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è globale