Analisi Matematica I
Prova scritta n. 2

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014-2015

9 giugno 2015

1. Verificare che per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente successione definita per ricorrenza ammette limite e calcolarlo:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases} ;$$

stabilire inoltre per quali valori del parametro reale α risulta convergente la corrispondente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ;$$

stabilire infine per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ vale la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ < \frac{\alpha}{1-\alpha} \ .$$

2. Calcolare gli integrali indefiniti:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\, dx \ , \qquad \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\, dx.$$

3. Dimostrare che la funzione $f(x) = \cos(x^3) - \sin(x^2) + x^2$ presenta un punto di massimo relativo per $x = 0$.

4. (a) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

   (b) Dedurre dalle stime precedenti che

$$\frac{2}{3} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leq \frac{\pi}{2}.$$