

Nome

Cognome

(4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{n^2+1}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \sin(3x^2)}{\log(1+3x^2)}$.

(a) 1 (b) $-\frac{2}{3}$

(5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^1 \frac{1}{e^x + 5 + 4e^{-x}} dx$

$\int \frac{1}{e^x + 5 + 4e^{-x}} dx = \int \frac{1}{t^2 + 5t + 4} dt = \int \frac{A}{t+1} + \int \frac{B}{t+4} = \dots$
 $e^x = t, dx = \frac{dt}{t}$ $A = \frac{1}{3}$ $B = -\frac{1}{3}$

(5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{e^x}{x^2(x^2-1)}$

Insieme def. $x^2-1 \neq 0 \quad x \neq 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$

(5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \log\left(\frac{\log x - 1}{3x}\right)$.

Insieme def. $\frac{\log x - 1}{3x} > 1 \Rightarrow \log x > 1 \Rightarrow x > e$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 $f'(x) = \frac{3x}{\log x - 1} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot 3x - 3(\log x - 1)}{(3x)^2} = \frac{4 - \log x}{x(\log x - 1)}$
 $x = e^2$ MAX ASS., No min.

(5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$ tale che $y(0) = y'(0) = 1$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{16}}}{2} = \frac{1}{4} \text{ doppio}$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{1}{4}x} =$$

$$y(0) = C_1 = 1, \quad C_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(4 punti) In una classe ci sono dieci studenti, e i loro nomi sono riportati sul registro in ordine alfabetico. La prof. di matematica sceglie a caso tre di loro e li interroga. Qual e' la probabilita' che i nomi dei tre studenti interrogati siano nomi consecutivi sul registro?

$$\text{Possibili estrazioni} \quad \binom{10}{3} = 120$$

$$\text{estrazioni favorevoli} \quad 8 : (1,2,3), (2,3,4) \dots (8,9,10)$$

$$\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

(4 punti) In una lotteria Marco estrae un biglietto da un sacchetto in cui ci sono sette biglietti numerati da 1 a 7. Marco sa che se il numero sul biglietto e' pari vince il quadrato del numero (in Euro), mentre se e' dispari vince il doppio del valore del numero (in Euro). Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria data dalla vincita di Marco.

$$P = \frac{1}{7}$$

$$\text{Valore atteso} \quad \frac{1}{7} (2+4+6+16+10+36+14) = \frac{88}{7}$$

8 punti) Proprietá della funzione integrale e Teorema Fondamentale del Calcolo integrale .