Analisi Matematica 2 e Complementi
Esercizi di preparazione alla prima prova scritta preliminare

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

31 marzo 2010

1. Calcolare, se esiste
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+y^3}{x^2+y^2}.$$

2. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \frac{x^3-(xy)^\alpha}{x^2+y^2}.$$
Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione risulta essere continua? Per quali risulta differenziabile?

3. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = 2x^4 - xy + y^2.$$
   (a) Determinare i punti critici e la loro natura (max/min/sella).
   (b) Dimostrare che f non ha massimo su $\mathbb{R}^2$.
   (c) Dimostrare che l'insieme
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) \le 0\}$$
   è limitato.
   (d) Determinare il valore minimo assunto da f su $\mathbb{R}^2$.

4. Si consideri la curva
$$\gamma(t) = (1 + 2\cos t, \sin(2t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$
Disegnare la curva e calcolare
$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

5. (a) Disegnare l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}.$$

   (b) Calcolare il volume dell'insieme

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq |x| + |y| \leq 2,\ |z| \leq 1\}.$$

   (c) Calcolare il volume dell'insieme

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq |x - 3y| + |z + x| \leq 2,\ |2x - y| \leq 1\}.$$

6. Calcolare il flusso del campo $v(x, y, z) = (0, 0, z^3)$ attraverso la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1, z = xy\}$$

(si scelga a piacere l'orientazione della superficie).

7. Calcolare

$$\lim_{k\to\infty} \int_2^4 \frac{1}{k \log(1 + x/k)} dx.$$

8. Sia

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\log x)^k.$$

   (a) Determinare l'insieme su cui la serie converge puntualmente.
   (b) Dimostrare che non c'è convergenza uniforme su $[1, e]$.
   (c) Dimostrare che la serie converge totalmente sull'intervallo $[1, 2]$.

9. Sia $y(x)$ la soluzione (massimale) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y - x y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Disegnare la soluzione. In particolare

   (a) dimostrare che la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$;
   (b) calcolare $\lim_{x\to-\infty} y(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

10. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Determinare i punti stazionari (o critici) del sistema. Determinare la natura delle soluzioni in tali punti.

NB. Per risolvere il precedente esercizio bisogna utilizzare il *teorema di linearizzazione* che riportiamo qui di seguito (lo

Se abbiamo il sistema autonomo non lineare:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

e se (x_0, y_0) è un punto stazionario ($f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$), la natura del punto stazionario è qualitativamente la stessa che si ha nel punto $(0, 0)$ per il corrispondente sistema lineare

$$\begin{cases} x' = f_x(x_0, y_0)\, x + f_y(x_0, y_0)\, y \\ y' = g_x(x_0, y_0)\, x + g_y(x_0, y_0)\, y \end{cases}$$

a meno che la matrice associata al sistema lineare non abbia, in $(0, 0)$ un autovalore con parte reale nulla. In particolare se il sistema lineare ha un *centro*, il teorema di linearizzazione non si può applicare.

Osserviamo che la matrice del sistema linearizzato è data dalla matrice Jacobiana della funzione $(f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$