Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni scheda n. 1

Ingegneria, a.a. 2009-2010

30 ottobre 2009

1. Si consideri la funzione
$$f(x, y) = x^2 e^y - xy^2.$$
Il punto $(1, 0)$: **(A)** non è un punto critico, **(B)** è un un minimo relativo, **(C)** è un massimo relativo, **(D)** è un punto a sella.

   Soluzione. Si ha
$$f_x = 2xe^y - y^2, \qquad f_x(1, 0) = 2$$
dunque **(A)** in quanto non si annullano entrambe le derivate parziali.

2. Il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^4}$$
(A) non esiste, **(B)** vale 0, **(C)** vale $+\infty$, **(D)** vale $-\infty$.

   Soluzione. Per $y = 0$ si ha $f(x, 0) = 0$ dunque il limite, se esiste, è 0. D'altra parte per $x = y$ si ha
$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^4} = \frac{1}{1 + x^2} \to 1 \qquad \text{per } x \to 0.$$
dunque **(A)** .

3. Il numero di punti critici della funzione
$$f(x, y) = x^7 y^2 - yx^6 + 2$$
è: **(A)** uno, **(B)** due, **(C)** tre, **(D)** infinito.

   Soluzione. Si ha
$$f_x = 7x^6 y^2 - 6x^5 y,$$
$$f_y = 2x^7 y - x^6$$
dunque entrambe le derivate parziali si annullano se $x = 0$ e y qualunque. Dunque **(D)** .

4. Il valore minimo assunto dalla funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$$

(A) non esiste, **(B)** è -1, **(C)** è 0, **(D)** è 1.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2, \\ f_y &= 2y \end{aligned}$$

da cui il punto $(1, 0)$ è l'unico punto critico della funzione. Sulla retta $y = 0$ si ha $f(x, 0) = x^2 - 2x$ che ha un minimo assoluto per $x = 1$. D'altra parte dal segno di f_y sappiamo che su ogni retta verticale il minimo di f si ha per $y = 0$.

Di conseguenza $(1, 0)$ è il punto di minimo assoluto per f. E si ha $f(1, 0) = -1$ da cui **(B)** .

5. Determinare il valore massimo assunto dalla funzione

$$f(x, y) = 3x - 4y$$

sul cerchio $B = \{x^2 + y^2 \leq 25\}$. **(A)** -7, **(B)** 0, **(C)** 7, **(D)** 25.

Soluzione. Il gradiente di f è il vettore costante $(3, -4)$. Il massimo assoluto assunto da f sul cerchio B è quindi il punto di frontiera in cui il vettore normale ha la stessa direzione del gradiente cioè proprio il punto $(3, -4)$. Visto che $f(3, -4) = 25$ vale **(D)** .

6. Nel punto $(0, 0)$ la funzione

$$f(x, y) = x^4 - y^6$$

(A) ha un punto di minimo relativo, **(B)** ha un punto di massimo relativo, **(C)** non ha un punto critico, **(D)** ha un punto critico che non è né massimo né minimo.

Soluzione. Si ha $f_x = 4x^3$, $f_y = -6y^5$. Il punto $(0, 0)$ è dunque un punto critico con $f(0, 0) = 0$. D'altra parte $f(x, 0) = x^4 > 0$ per $x \neq 0$ e $f(0, y) = -y^6 < 0$ per $y \neq 0$. Dunque **(D)** .

7. L'insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 < 1\}$$

(A) è aperto e limitato, **(B)** è chiuso, **(C)** non è limitato, **(D)** non è né aperto né chiuso.

Soluzione. Vale **(C)** , l'insieme non è limitato perché l'asse delle y, ovvero l'insieme dei punti $(0, y, 0)$ è interamente contenuto nell'insieme.

8. La funzione
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\log(1-xy)}$$
nel punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ è **(A)** non definita, **(B)** definita ma non continua, **(C)** continua ma non differenziabile, **(D)** differenziabile.

Soluzione. Posto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = 1$ si ha $x^2+y^2-1 = 1/2 > 0$ e $1-xy = 1-\sqrt{2}/2 > 0$ dunque in tale punto tutte le funzioni coinvolte sono definite e differenziabili. Per composizione vale quindi **(D)** .

9. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$\begin{cases} f_x = x^2 - y, \\ f_y = xy. \end{cases}$$
Allora la funzione f **(A)** non esiste, **(B)** esiste ma non è di classe $\mathcal{C}^2$, **(C)** esiste, è di classe $\mathcal{C}^2$ ma non è costante, **(D)** esiste ed è costante.

Soluzione. . Se f esistesse sarebbe una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ in quanto f_x e f_y sono derivabili infinite volte. Dunque dovrebbe valere il teorema di Schwarz, invece si ha:
$$(f_x)_y = -1, \qquad (f_y)_x = y.$$
Quindi **(A)** .

10. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(5\cos t, 5\sin t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora il vettore $\nabla f(3,4)$ può assumere solamente uno dei seguenti valori. Quale? **(A)** (3,4), **(B)** (4,3), **(C)** (3,-4), **(D)** (3,3).

Soluzione. La funzione è costante sulla circonferenza di raggio 5 centrata nell'origine. Dunque il gradiente in ogni punto della circonferenza deve essere ortogonale ad essa. Si avrà dunque $\nabla f(3,4) = \lambda(3,4)$ cioé **(A)** .

11. Gli insiemi di livello della funzione $f(x,y) = x^2+y^4$ **(A)** sono tutti limitati, **(B)** sono tutti illimitati, **(C)** alcuni sono limitati alcuni illimitati, **(D)** sono tutti vuoti.

Soluzione. Essendo $f(x,y) = c$ significa $x^2+y^4 = c$. Allora $x^2 \le c$ e $y^4 \le c$ da cui $|x| \le \sqrt{|c|}$ e $y \le \sqrt[4]{|c|}$. Dunque l'insieme di livello c è contenuto in un rettangolo e vale quindi **(A)** .

12. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che in ogni punto si ha $f_x = f_y$. Allora possiamo affermare che **(A)** f è differenziabile sulla retta $y = x$, **(B)** f è di classe $\mathcal{C}^1$, **(C)** $f(1,1) = f(0,0)$, **(D)** f è costante sulla retta $y = -x$.

Soluzione. Essendo $f_x = f_y$ si ha che il gradiente di f è sempre parallelo al vettore $(1,1)$. In particolare f è costante sulle rette perpendicolari a tale vettore. Dunque vale **(D)** .