Analisi Matematica II modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

4 aprile 2007

1. Disegnare qualitativamente il grafico della funzione `****A***`

$$f(x) = \log(e^x - 2x)$$

`****B***`

$$f(x) = e^{\frac{1}{\log(x^4 - x + 1)}}$$

`****C***`

$$f(x) = \log(x - 2\log x)$$

`****D***`

$$f(x) = e^{\frac{1}{\log(3x^4 - 4x^3 + 2)}}$$

Soluzione.

Chiamiamo $g(x)$ l'argomento del logaritmo. Per determinare il dominio di definizione di f bisogna stabilire innanzitutto quando g è positiva. Facendo la derivata si trova che g ha un unico punto di minimo assoluto e che la funzione in tale punto è positiva. Dunque la funzione g è sempre positiva (nel compito `C` g è definita solo per $x > 0$ per via del secondo logaritmo, nel compito `D` g ha anche un flesso orizzontale).

Nel compito `A` la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ha un minimo in $\log 2$, ha asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$ e tende asintoticamente alla funzione $log(-2x)$ per $x \to -\infty$.

Nel compito `B` bisogna determinare i punti in cui si annulla il denominatore. Questo succede se $x^4 - x + 1 = 1$ ovvero se $x(x^3 - 1) = 0$ cioè per $x = 0$ e $x = 1$. I limiti agli estremi del dominio sono: 1 per $x \to -\infty$, $+\infty$ per $x \to 0^-$, 0 per $x \to 0^+$, 0 per $x \to 1^-$ e 1 per $x \to +\infty$. In 0^+ e 1^- anche la derivata tende a zero. La funzione ha un massimo locale in $\sqrt[3]{2}/2$.

Nel compito `C` la funzione è definita per $x > 0$. Ha un minimo assoluto in $x = 2$. Tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e tende asintoticamente a $\log x$ per $x \to +\infty$.

Nel compito `D` la funzione $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ ha un minimo assoluto in $x = 1$ e si ha $g(1) = 1$, inoltre presenta un flesso orizzontale in $x = 0$. Dunque il logaritmo al denominatore è sempre non negativo e si annulla per $x = 1$. La funzione quindi è definita su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \to 1$, mentre per $x \to 1^\pm$ si ha $f(x) \to +\infty$. La funzione f' ha segno opposto a quello di g'. In particolare f ha pure un flesso orizzontale per $x = 0$.

2. Calcolare il limite `*****A**`

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - \sin(e^x - 1) - 1}{\cos(\sin x) - \cos x}$$

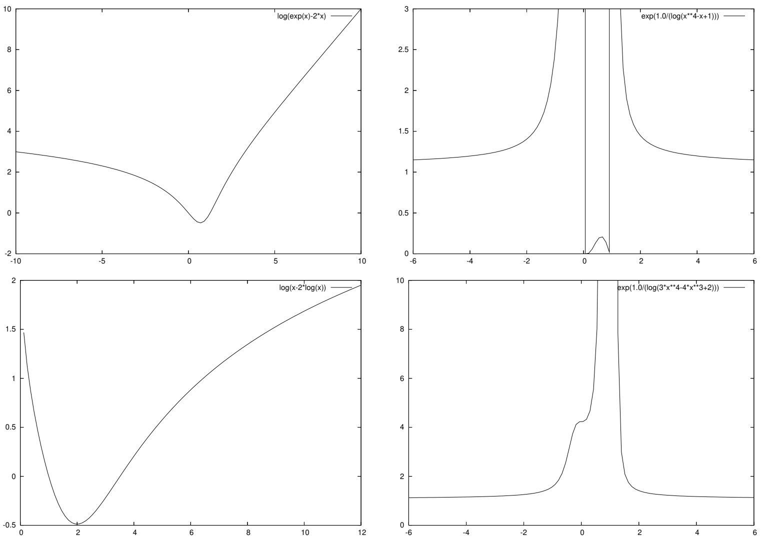

Figura 1: I grafici di funzione dell'esercizio 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \sin(e^x - 1) - 1}{x \sin x - x \operatorname{tg} x}$$

*****B**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{1 - \cos(1 - \cos x)}$$

*****C**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin(x) - x \operatorname{tg}(x)}{1 - \cos(1 - \cos x)}$$

*****D**

Utilizzando gli sviluppi

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\
\sin(e^x - 1) &= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \\
\cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
\cos(1 - \cos x) &= 1 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \\
x \sin x - x \operatorname{tg} x &= -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

si ottengono rispettivamente i limiti: $-1/2$, $-1/6$, $4/3$, -4.

3. Dire, motivando la risposta, se la seguente funzione è uniformemente continua sull'intervallo $(0, +\infty)$:

$$f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$$

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2x+1}$$

$$f(x) = \log(1+x^2)$$

******A*

******B*

******C*

******D*

Soluzione. Per quanto riguarda la prima funzione si osserva che f è derivabile e che la derivata tende a zero per $x \to +\infty$ ed ha limite finito $-1/2$ per $x \to 0^+$. Questo significa che la derivata è limitata in un intorno destro di 0, $(0, \epsilon]$ e in un intorno di $+\infty$, $[M, +\infty)$. Per il Teorema di Weierstraß essendo continua, la derivata è limitata anche sull'intervallo $[\epsilon, M]$ e dunque è limitata su tutta la semiretta $(0, +\infty)$. Essendo la derivata limitata, la funzione f è lipschitziana e quindi uniformemente continua.

La seconda funzione è pure derivabile con derivata continua. La derivata tende a -1 per $x \to 0^+$. Dunque la derivata è limitata in un intorno di 0^+, $(0, \epsilon]$. Inoltre dalla stima $|\sin| \leq 1$ si ottiene facilmente che per $x \geq \epsilon$ si ha $|f(x)| \leq 1/\epsilon$. Dunque la funzione f' è limitata su tutta la semiretta $(0, +\infty)$ e quindi f è lipschitziana ed uniformemente continua.

La terza e la quarta funzione hanno proprietà analoghe alla prima, la derivata è continua ed ha limite finito in 0^+ e in $+\infty$.

Dire inoltre se la seguente funzione è lipschitziana sull'intervallo $(0, +\infty)$:

$$g(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}$$

$$g(x) = \log(e^x - 1)$$

$$g(x) = \frac{\sin(x^3)}{x}$$

******A*

******B*

******C*

******D*

Soluzione. La prima funzione $f(x)$ ha derivata

$$f'(x) = \frac{\pi}{(2x+1)\cos\frac{\pi x}{2x+1}}.$$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{\sin\frac{\pi/2}{2x+1}}$$

e quindi si osserva che $f'(x) \to 1$ per $x \to +\infty$ e tende a 1 anche per $x \to 0^+$. In definitiva $f'(x)$ é una funzione limitata e quindi f è lipschitziana.

Lo stesso ragionamento si può fare per la seconda funzione.

La terza funzione non è lipschitziana. Per dimostrarlo è sufficiente trovare una successione di punti x_k tale che $f'(x_k) \to \infty$. Essendo

$$f'(x) = 3x\sin(x^3) - \sin(x^3)$$

basta scegliere $x_k = \pi/2 + 2k\pi$ per ottenere $f'(x) = 3x_k - 1 \to \infty$ per $k \to \infty$.