Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

13 febbraio 2006

1. Dimostrare che la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] y & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è differenziabile nel punto $(0,2)$.

Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali nel punto $(0,y)$:

$$\begin{aligned} f_x(0,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{hy}-1-hy}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1+hy+\frac{1}{2}h^2y^2+o(h^2)-1-hy}{h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}y^2 + o(1) = \frac{1}{2}y^2; \\ f_y(0,y) &= \frac{d}{dy} f(0,y) = \frac{d}{dy} y = 1. \end{aligned}$$

Dunque per avere la differenziabilità nel punto $(0,y)$ bisogna mostrare che il seguente limite esiste ed è nullo:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,y+k)-f(0,y)-\frac{1}{2}hy^2-k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Consideriamo innanzitutto il caso $h \neq 0$. In tal caso si ha

$$\begin{aligned} &\frac{f(h,y+k)-f(0,y)-\frac{1}{2}hy^2-k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{\frac{e^{hy+hk}-1}{h} - y - \frac{1}{2}hy^2 - k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{1+hy+hk+\frac{1}{2}(hy+hk)^2+o(h^2)-1-hy-\frac{1}{2}h^2y^2-hk}{h\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \frac{h^2ky+\frac{1}{2}h^2k^2+o((hy+hk)^2)}{h\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{o(\sqrt{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che $o((hy+ky)^2) \subseteq o(\sqrt{h^2+k^2})$ visto che

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(hy+hk)^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Dunque per $(h,k) \to (0,0)$ con $h \neq 0$ il limite cercato è zero. D'altra parte per $h = 0$ il limite si riduce a

$$\lim_{k\to 0} \frac{y + k - y - k}{|k|} = 0.$$

Dunque la funzione è differenziabile su tutta la retta $(0, y)$ e in particolare nel punto $(0, 2)$.

2. (a) Determinare i punti di massimo e minimo relativo per la funzione

$$f(x, y) = 3x^2y^2 - xy^3 + x^4.$$

(b) Determinare anche l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $f(x, y)$ su $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Determiniamo innanzitutto i punti critici risolvendo l'equazione $\nabla f = 0$:

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy^2 - y^3 + 4x^3 = 0 \\ f_y &= 6x^2y - 3xy^2 = 3xy(2x - y) = 0. \end{aligned}$$

Dunque f_y si annulla se $x = 0$, $y = 0$ oppure $y = 2x$. Se $x = 0$ dalla prima equazione si trova $y = 0$, allo stesso modo se $y = 0$ la prima equazione ci dice che $x = 0$. Nel caso $y = 2x$ la prima equazione diventa:

$$(24 - 8 + 4)x^3 = 0$$

e quindi ancora $x = 0$, $y = 0$. Dunque $(0, 0)$ è l'unico punto critico per f. Si vede facilmente che tutte le derivate seconde si annullano in $(0, 0)$ quindi lo studio dell'Hessiano non è utile per determinare la natura del punto critico. Studiando il segno della derivata parziale f_y si può anche notare che sulla retta $y = 2x$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ assume massimo, ma ristretta a tale retta la funzione $x \mapsto f(x, 2x)$ assume minimo in zero. Dunque anche questo metodo non ci dà informazioni se non il suggerimento di provare a dimostrare che il punto $(0, 0)$ non è né massimo né minimo locale.

Consideriamo dunque la funzione f ristretta alla generica retta per l'origine $y = mx$. Si ha

$$g_m(x) = f(x, mx) = (3m^2 - m^3 + 1)x^4.$$

Notiamo che per $m = 0$ si ha $g_0(x) = x^4$ e dunque $(0, 0)$ è un minimo su tale retta. Per $m = 4$ (ad esempio) si ha invece $g_m(x) = -15x^4$ e quindi $(0, 0)$ risulta essere un massimo su tale retta. Concludiamo quindi che $(0, 0)$ non è né massimo nè minimo locale.

Per quanto riguarda l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei valori assunti da f, considerando la funzione ristretta alle stesse rette considerate prima ($y = 0$ e $y = 4x$) si nota che $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$.

3. (a) Mostrare che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 + kx)^{-\frac{1}{x}}.$$

converge totalmente sull'intervallo $(0, \frac{1}{2})$.

(b) Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} (1+kx)^{-\frac{1}{x}}.$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che per $x > 0$ fissato la serie ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum k^{-\frac{1}{x}}$ e dunque converge puntualmente per $\frac{1}{x} > 1$ ovvero $x < 1$.

Per determinare la convergenza totale studiamo la funzione

$$f_k(x) = (1+kx)^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}\log(1+kx)}.$$

Si ha

$$f_k'(x) = -\frac{\frac{kx}{1+kx} - \log(1+kx)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}\log(1+kx)}$$

e dunque $f_k'(x) \geq 0$ è equivalente a

$$g_k(x) = \log(1+kx) - \frac{kx}{1+kx} \geq 0.$$

Studiamo anche la funzione $g_k(x)$:

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= \frac{k}{1+kx} - \frac{k(1+kx) - k^2 x}{(1+kx)^2} \\ &= \frac{k}{1+kx} - \frac{k^2 x}{(1+kx)^2} = \frac{k^2 x}{(1+kx)^2} \end{aligned}$$

e dunque $g_k'(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Di conseguenza g_k è una funzione crescente con $g_k(0) = 0$ e quindi $g_k(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$. Concludiamo quindi che anche $f_k(x)$ è una funzione crescente e ricordando che $\log(1+y) = y + o(y)$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f_k(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{kx+o(x)}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{-k+o(1)} = e^{-k} > 0$$

dunque $f_k(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Possiamo quindi affermare che

$$\sup_{x \in (0,\alpha)} |f_k(x)| = f_k(\alpha)$$

e sapendo (dalla convergenza puntuale) che $\sum f_k(\alpha)$ converge se e solo se $\alpha < 1$ possiamo affermare che c'è convergenza totale su tutti gli intervalli $(0, \alpha)$ con $\alpha < 1$ e quindi anche sull'intervallo $(0, 1/2)$.

Abbiamo anche notato come le funzioni f_k, che sono definite per $x > 0$ possono essere estese per continuità a funzioni $\tilde{f}_k$ definite per $x \geq 0$ ponendo $\tilde{f}_k(0) = e^{-k}$. Per quanto visto in precedenza la serie $\sum \tilde{f}_k$ converge totalmente sull'intervallo $[0, 1/2]$ e quindi la sua somma $\tilde{S}(x)$ è una funzione continua su $[0, 1/2]$. In particolare si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}.$$

D'altra parte

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{x \to 0^+} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k(x) = \lim_{x \to 0^+} \tilde{S}(x)$$

e quindi abbiamo risposto anche alla seconda questione.