Analisi Matematica I modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

22 dicembre 2004

`A*******`

1. (a) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{1-n+2n^2}\right)^{n^2}.$$

Soluzione. Si verifica facilmente che la base della potenza tende ad 1/2 mentre l'esponente tende a $+\infty$. La potenza tende dunque a zero.

`B*******`

(b) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{1-n+n^2}\right)^{n^2}.$$

Soluzione. Si verifica facilmente che la base della potenza tende a 2 mentre l'esponente tende a $+\infty$. La potenza tende dunque a $+\infty$.

`C*******`

(c) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{1-n+n^2}\right)^{n}.$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^2+n}{1-n+n^2}\right)^{n} &= \left(\frac{1-n+n^2-1+2n}{1-n+n^2}\right)^{n}\\ &= \left[\left(1+\frac{2n-1}{1-n+n^2}\right)^{\frac{1-n+n^2}{2n-1}}\right]^{n\frac{2n-1}{1-n+n^2}}.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'espressione tra parentesi quadre ha come limite notevole il numero e, mentre si verifica facilmente che l'esponente tende a 2. Il limite cercato è dunque e^2.

D*******

(d) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{1-n+n^2}\right)^{2n^2-n}.$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^2+n}{1-n+n^2}\right)^{2n^2-n} &= \left(\frac{1-n+n^2-1+2n}{1-n+n^2}\right)^{2n^2-n}\\ &= \left[\left(1+\frac{2n-1}{1-n+n^2}\right)^{\frac{1-n+n^2}{2n-1}}\right]^{(2n^2-n)\frac{2n-1}{1-n+n^2}}.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'espressione tra parentesi quadre ha come limite notevole il numero e mentre si verifica facilmente che l'esponente tende a $+\infty$. Dunque il limite in questione vale $+\infty$.

A***

2. (a) Dire se la funzione

$$f(x) = |x\sin x - e^x x^5|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Posto $g(x) = x\sin x - e^x x^5$ si ha $f(x) = |g(x)|$ dove $g(x)$ è una funzione continua e derivabile in $x = 0$. Inoltre possiamo calcolare facilmente la derivata di g

$$g'(x) = \sin x + x\cos x - e^x x^5 - e^x 5x^4$$

e notare che $g'(0) = 0$.

Consideriamo ora il rapporto incrementale di f nel punto $x = 0$:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|g(h)|}{h} = \frac{|g(h)|}{g(h)}\cdot\frac{g(h)}{h} = \frac{|g(h)|}{g(h)}\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}.$$

Abbiamo ottenuto il prodotto di due frazioni, la prima delle quali è limitata. La seconda frazione è invece il rapporto incrementale di g calcolato in $x = 0$ e per quanto visto prima tende a $g'(0) = 0$ per $h \to 0$. Il rapporto incrementale di f è dunque il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima e tende dunque a zero.

In conclusione la funzione f è derivabile in $x = 0$ ed essendo derivabile è anche continua in tale punto.

B***

(b) Dire se la funzione

$$f(x) = |x^2 e^x - x\sin^2 x|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Si risolve in maniera analoga al caso (a).

C***

(c) Dire se la funzione

$$f(x) = |x^2 \cos x - x \sin^2 x|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Si risolve in maniera analoga al caso (a).

D***

(d) Dire se la funzione

$$f(x) = |x \sin^3 x - x^3 \cos x|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Si risolve in maniera analoga al caso (a).

****A***

3. (a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^6 = x^5 + \alpha$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Posto $f(x) = x^6 - x^5 - \alpha$ si tratta di determinare il numero di zeri della funzione f al variare del parametro α. Si ha

$$f'(x) = 6x^5 - 5x^4 = (6x - 5)x^4.$$

Notiamo che $f' > 0$ sull'intervallo $(5/6, +\infty)$ e dunque f è strettamente crescente su $[5/6, +\infty)$. D'altra parte $f' < 0$ sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e sull'intervallo $(0, 5/6)$. Dunque f è strettamente crescente sugli intervalli chiusi $(-\infty, 0]$ e $[0, 5/6]$ cioè f è strettamente decrescente sull'intero intervallo $(-\infty, 5/6]$. Dunque scelto $x > 5/6$ si ha $f(x) > f(5/6)$ in quanto f è strettamente crescente in $[5/6, +\infty)$, mentre preso $x < 5/6$ si ha comunque $f(x) > 5/6$ in quanto f è strettamente decrescente su $(-\infty, 5/6]$. Notiamo ora che

$$f(5/6) = \frac{5^6}{6^6} - \frac{5^5}{6^5} - \alpha = \frac{5^5}{6^5} \cdot (5/6 - 1) - \alpha = -\frac{5^5}{6^6} - \alpha$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

Si distinguono dunque tre casi. Se $\alpha < -5^5/6^6$ allora $f(5/6) > 0$ e per quanto visto prima $f(x) \geq f(5/6) > 0$ per ogni x. Concludiamo quindi che la funzione f non ha zeri e dunque l'equazione data non ha soluzioni.

Se $\alpha = -5^5/6^6$ allora $f(5/6) = 0$ mentre $f(x) > f(5/6) = 0$ per ogni $x \neq 5/6$. Concludiamo dunque che l'equazione data ha l'unica soluzione $x = 5/6$.

Se $\alpha > -5^5/6^6$ troviamo che $f(5/6) < 0$. Siccome i limiti per $x \to \pm\infty$ sono positivi, dal teorema degli zeri possiamo concludere che la funzione f si annulla in almeno due punti, uno nell'intervallo $(5/6, +\infty)$ e uno nell'intervallo $(-\infty, 5/6)$. Inoltre essendo strettamente crescente su tali intervalli, la funzione f è anche iniettiva su ognuno degli intervalli e dunque le due soluzioni trovate sono uniche. In conclusione l'equazione data ha esattamente due soluzioni.

****B***

(b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^7 = x^6 + \alpha$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di determinare il numero di zeri della funzione $f(x) = x^7 - x^6 - \alpha$. Si ha

$$f'(x) = 7x^6 - 6x^5 = (7x - 6)x^5.$$

Notiamo dunque che sull'intervallo $(-\infty, 0)$ si ha $f' > 0$ e dunque la funzione f è strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, 0]$. Invece $f' < 0$ sull'intervallo $(0, 6/7)$ e dunque f risulta essere strettamente decrescente sull'intervallo $[0, 6/7]$. Infine $f' > 0$ sull'intervallo $(6/7, +\infty)$ e dunque la funzione f risulta essere strettamente crescente sull'intervallo $[6/7, +\infty)$.

Per riassumere possiamo dire che se $x < 0$ si ha $f(x) < f(0)$, se $0 < x < 6/7$ si ha $f(6/7) < f(x) < f(0)$ e infine se $x > 6/7$ si ha $f(x) > f(6/7)$.

Notiamo poi che $f(0) = -\alpha$ e che

$$f(6/7) = \frac{6^7}{7^7} - \frac{6^6}{7^6} - \alpha = \frac{6^6}{7^6} \cdot (6/7 - 1) - \alpha = -\frac{6^6}{7^7} - \alpha.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Distinguiamo dunque cinque casi. Se $\alpha < -6^6/7^7$ si ha $f(0) > 0$ e $f(6/7) > 0$. Nell'intervallo $(-\infty, 6/7)$ la funzione cambia segno e quindi deve avere almeno uno zero. D'altra parte sullo stesso intervallo la funzione è strettamente crescente e quindi iniettiva. Dunque c'è un unico zero in tale intervallo. Negli intervalli $[0, 6/7]$ e $[6/7, +\infty)$ la funzione risulta invece essere strettamente positiva e quindi non ci sono altre soluzioni. In conclusione l'equazione data ha, in questo caso, una unica soluzione.

Se $\alpha = -6^6/7^7$ si ha $f(0) > 0$ e $f(6/7) = 0$. La funzione ha esattamente uno zero nell'intervallo $(-\infty, 0)$ come nel caso precedente. Inoltre la funzione è positiva negli intervalli $[0, 6/7)$ e $(6/7, +\infty)$ e si annulla in $6/7$. In conclusione l'equazione data ha, in questo caso, esattamente due soluzioni.

Con ragionamenti analoghi concludiamo che l'equazione data ha esattamente tre soluzioni se $\alpha \in (-6^6/7^7, 0)$, ha due soluzioni se $\alpha = 0$ e infine ha una unica soluzione se $\alpha > 0$. ****C***

(c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^5 = x^6 + \alpha$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di determinare il numero di zeri della funzione $f(x) = x^6 - x^5 + \alpha$. La soluzione è analoga al caso (a). Si conclude che se $\alpha > 5^5/6^6$ l'equazione non ha soluzioni, se $\alpha = 5^5/6^6$ c'è una unica soluzione mentre se $\alpha < 5^5/6^6$ ci sono esattamente due soluzioni. ****D***

(d) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^6 = x^7 + \alpha$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di determinare il numero di zeri della funzione $f(x) = x^7 - x^6 + \alpha$. La soluzione è analoga al caso (b). Si conclude che se $\alpha > 6^6/7^7$ o $\alpha < 0$ l'equazione ha una unica soluzione. Per $\alpha = 6^6/7^7$ o $\alpha = 0$ si hanno due soluzioni, per $\alpha \in (0, 6^6/7^7)$ si hanno tre soluzioni,

******A*

4. (a) i. Dimostrare che per ogni $x \in (1, 2)$ si ha ******C*

$$\log x + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0.$$

ii. Posto $f(x) = x \log x - \sqrt{x}$ dimostrare che

$$f\left(\frac{2005}{2004}\right) < f\left(\frac{2004}{2003}\right).$$

Soluzione. Sia

$$g(x) = \log x + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Notiamo che la funzione g è somma di funzioni strettamente crescenti e dunque è una funzione strettamente crescente (in alternativa si può verificare facilmente che $g'(x) > 0$ per ogni $x > 0$). Notiamo anche che

$g(1) = 1-1/2 = 1/2 > 0$. Dunque per ogni $x > 1$ si ha $g(x) > g(1) > 0$ e in particolare questo è vero per ogni $x \in (1, 2)$.

Anche la funzione f è strettamente crescente sull'intervallo $(1, 2)$ infatti $f'(x) = g(x) > 0$ su tale intervallo. Essendo $1 < 2005/2004 < 2004/2003 < 2$, la monotonia di f ci fornisce la disuguaglianza richiesta. ******B*

(b) i. Dimostrare che per ogni $x \in (0, 1)$ si ha ******D*

$$1 - \log x - \frac{\sqrt{x}}{2} > 0.$$

ii. Posto $f(x) = \frac{\log x}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ dimostrare che

$$f\left(\frac{2004}{2005}\right) > f\left(\frac{2003}{2004}\right).$$

Soluzione. Sia

$$g(x) = 1 - \log x - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Notiamo che la funzione g è strettamente decrescente in quanto è somma di funzioni strettamente decrescenti (in alternativa si può verificare facilmente che $g'(x) < 0$ per ogni $x > 0$). Notiamo anche che $g(1) = 1 - 1/2 = 1/2 > 0$. Dunque per ogni $x \in (0, 1)$ si ha $f(x) > f(1) > 0$.

Notiamo ora che la derivata di f vale

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x} - \log x}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1 - \log x - \frac{\sqrt{x}}{2}}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Dunque $f'(x) > 0$ per $x \in (0, 1)$ per quanto visto prima e questo significa che f è strettamente crescente sull'intervallo $(0, 1)$. Essendo poi $0 < 2004/2005 < 2003/2004 < 1$, dalla monotonia di f otteniamo la disuguaglianza voluta.