Studio di funzione

24 febbraio 2003

Studiare qualitativamente il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - 1}.$$

Soluzione. Perché l'espressione che definisce f abbia senso è necessario che $x^2 \neq 1$. Dunque poniamo che $D = \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$ sia il dominio della funzione f. La funzione risulta dunque essere continua sul suo dominio.

Studiamo la funzione ai bordi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$$

Dunque le rette $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali per f. Inoltre si trova facilmente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -2$$

da cui si ricava che la retta $y = x - 2$ è un asintoto obliquo per f sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Studiamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 2x - 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

Posto

$$g(x) = x^4 - 4x^2 + 2x - 1$$

è chiaro che il segno di f' (sul dominio D) è uguale al segno di g. Studiamo quindi la funzione g. Si ha

$$g'(x) = 4x^3 - 8x + 2, \quad g''(x) = 12x^2 - 8.$$

Dunque $g''(x)$ è positivo per $|x| > \sqrt{2/3}$ e negativo per $|x| < \sqrt{2/3}$. Di conseguenza $g'(x)$ ha un massimo locale per $x = -\sqrt{2/3}$ e un minimo locale per

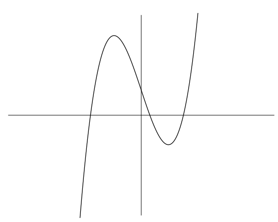
$x = \sqrt{2/3}$ e si vede facilmente che g' tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Siccome si ha (sapendo che $\sqrt{2/3} > 1/2$)

$$g'(\sqrt{2/3}) = -\sqrt{2/3}\frac{16}{3} + 2 < -\frac{8}{3} + 2 < 0$$

e

$$g'(-\sqrt{2/3}) = \sqrt{2/3}\frac{16}{3} + 2 > 0$$

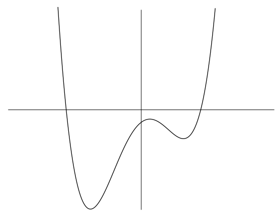
il grafico di g' avrà un andamento del tipo



in particolare g' si annulla in tre punti $x_1 < 0$ e $0 < x_2 < x_3$, in cui la funzione g ha rispettivamente un minimo locale, un massimo locale e poi di nuovo un minimo locale. Cerchiamo di determinare il segno di $g(x_1)$. Essendo $g'(x_1) = 0$ si ha $x_1^3 = 2x_1 - 1/2$ da cui si ottiene

$$g(x_1) = x_1(2x_1 - 1/2) - 4x_1^2 + 2x_1 - 1 = \frac{-4x_1^2 + 3x_1 - 2}{2}.$$

L'espressione $h(x) = -4x^2 + 3x - 2$ rappresenta una parabola concava e, siccome il discriminante $3^2 - 4(-4)(-2)$ è negativo, la funzione $h(x)$ è sempre negativa. In particolare $h(x_1)$ e quindi $g(x_1)$ è negativo. Lo stesso identico ragionamento si può fare per x_2 e x_3 trovando quindi che anche $g(x_2) < 0$ e $g(x_3) < 0$. Dunque $g(x)$ ha il seguente grafico qualitativo:



In particolare la funzione g (e quindi anche f') si annulla in due punti $x_4 < 0$ e $x_5 > 0$ ed è positiva all'esterno di queste due radici.

Dallo studio degli asintoti già sappiamo che f deve avere almeno un minimo relativo per $x > 1$ e un massimo relativo per $x < -1$. Sapendo ora che f' si annulla in soli due punti possiamo quindi concludere che non ci sono altri punti critici di f e quindi

$$x_4 < -1, \quad x_5 > 1,$$

$$f'(x) > 0 \text{ per } x < x_4,\ x > x_5,$$

$$f'(x) < 0 \text{ per } x_4 < x < -1,\ -1 < x < 1,\ 1 < x < x_5.$$

Essendo f strettamente decrescente per $x \in]-1, 1[$ e avendo degli asintoti agli estremi di questo intervallo, deduciamo che esiste un unico punto x_6 in $]-1, 1[$ tale che $f(x_6) = 0$. Essendo poi $f(0) = -1$ deduciamo che $x_6 < 0$.

Verifichiamo se esistono altre radici di f. Studiamo il segno del denominatore di f:

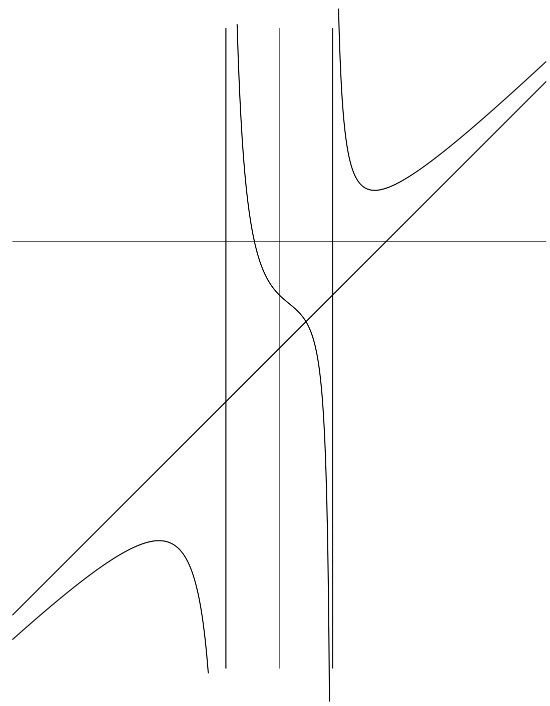
$$h(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

Si ha

$$h'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

che rappresenta una parabola convessa che non incontra mai l'asse delle x. Dunque $h'(x) > 0$ per ogni x e quindi $h(x)$ è strettamente crescente. Visto che all'infinito h tende a $\pm\infty$ deduciamo che h ha un unico zero che quindi è proprio x_6. Dunque per $x > 1$ si ha $f(x) > 0$ e per $x < -1$ si ha $f(x) < 0$.

Le informazioni raccolte fino ad ora ci permettono di tracciare il seguente grafico:



Si può facilmente verificare che la funzione interseca l'asintoto obliquo in un solo punto. Infatti si trova

$$f(x) - (x - 2) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$$

e dunque l'unica intersezione con l'asintoto si ha per $x = 1/2$.

Con non pochi calcoli è anche possibile calcolare la derivata seconda verificando che la convessità corrisponde a quella riportata nel grafico.

Modifiche

31.3.2005 apportate alcune correzioni.