Esercizi (2/12/1999)

1. Siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni a valori reali; dimostrare:

$$\sup_{x\in I}(f+g) \le \sup_{x\in I} f + \sup_{x\in I} g; \qquad \inf_{x\in I}(f+g) \ge \inf_{x\in I} f + \inf_{x\in I} g;$$

$$f, g \ge 0 \Rightarrow \sup_{x\in I}(fg) \le \sup_{x\in I} f \cdot \sup_{x\in I} g; \qquad f, g \le 0 \Rightarrow \inf_{x\in I}(fg) \ge \inf_{x\in I} f \cdot \inf_{x\in I} g;$$

   Fornire per ciascuno dei casi un esempio in cui vale l'uguaglianza ed uno in cui vale la diseguaglianza.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, definiamo funzioni $S_x, L_x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mediante:

$$S_x(r) = \sup_{]x-r,x+r[} f; \qquad L_x(r) = \inf_{]x-r,x+r[} f.$$

   Dimostrare:

   - S_x, L_x sono monotone;
   - Se
   $$\lim_{r\to 0^+} S_x(r) = \lim_{r\to 0^+} L_x(r)$$
   allora f è continua in x. (Vale anche l'implicazione contraria?)

3. Poniamo
$$E_n = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^{2n} + x_2^{2n} < 1\right\}$$
   e
$$Q = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1, |x_2| < 1\right\}$$
   Dire se è vero che $E_{n+1} \supset E_n$; dimostrare che $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = Q$.