Esercizi
27 novembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. *Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, convessa. Mostrare che se f non è costante e $f(0) < 0$ allora il numero di zeri di f è o 1 o 2.*

   -Vi sono al piú due zeri: se per assurdo $f(x) = f(y) = f(z) = 0$, $x < y < z$, in particolare, poichè i tre zeri sono diversi da 0 essendo $f(0) < 0$, ve ne sarebbero almeno due con lo stesso segno. Ma se si avesse $f(0) < 0 = f(a) = f(b)$, $0 < a < b$, si otterrebbe una contraddizione dall'ipotesi di convessità:

$$0 = f(a) \le f(0) + \frac{f(b) - f(0)}{b} a = f(0)(1 - \frac{a}{b}) < 0.$$

   Analogamente si ottiene una contraddizione se $f(0) < 0 = f(a) = f(b)$, $a < b < 0$.

   -Vi è almeno uno zero:

   - se vi è almeno un a per cui $f'_+(a) \neq 0$ oppure $f'_-(a) \neq 0$ si ottiene quanto desiderato. Infatti:

   se $f'_-(a) < 0$ si ha: $f(x) \ge f'_-(a)(x - a) + f(a) \longrightarrow +\infty$, $x \to -\infty$. In Particolare vi è $x < 0$ con $f(x) > 0$. Essendo f convessa su $\mathbf{R}$ è continua in $[x, 0]$. Poichè $f(0)f(x) < 0$ per il teorema del valor medio vi è $\xi \in]x, 0[$ per cui $f(\xi) = 0$;

   se $f'_+(a) > 0$ si ha $f(x) \ge f'_+(a)(x - a) + f(a) \longrightarrow +\infty$, $x \to +\infty$. Argomentando come al punto precedente si trova $\xi > 0$ per cui $f(\xi) = 0$;

   poichè $f'_+(a) \ge f'_-(a)$, non rimarrebbero altri casi da analizzare;

   - se per assurdo $\forall a : f'_+(a) = f'_-(a) = 0$ si avrebbe che $\forall a \exists f'(a) = 0$, cioè f sarebbe derivabile su tutto $\mathbf{R}$ con derivata nulla. Ma allora sarebbe costante, contraddicendo l'ipotesi.

2. *Calcolare il seguente integrale indefinito:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx.$$

   Poichè la funzione da integrare è definita per $x > 0$, si considera il seguente cambio di variabile $t = \sqrt[6]{x}$, per cui $t^6 = x$. Si ha quindi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\, dx \;=\; [t = \sqrt[6]{x}] \;\; 6\int \frac{t^5}{t^3 + t^2}\, dt \;=\; 6\int \frac{t^3}{t+1}\, dt \;=$$

$$6\int \frac{t^3+1}{t+1}\, dt \;-\; 6\int \frac{1}{t+1}\, dt \;= 6\int \frac{t^3+1}{t+1}\, dt \;-\; 6\log(t+1) \;=$$

$$6\int (t^2 - t + 1)\, dt \;- 6\log(t+1) = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log(t+1) \;=$$

$$[t = \sqrt[6]{x}] \;\; 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \log(\sqrt[6]{x} + 1)^6.$$

3. *Si consideri la funzione:*

$$f(x) \;=\; \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\;\; (k \in \mathbf{Z}).$$

(a) *calcolare se siste la derivata di f:* la funzione $g(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$ è continua su $\mathbf{R}$. Quindi la funzione integrale $F(y) = \int_0^y g(t)dt$ è derivabile su tutto $\mathbf{R}$. D'altronde $f(x) = F(\tan x)$. Quindi f è derivabile per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$, e si ha:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= F'(\tan x) \cdot (\tan x)' = g(\tan x) \cdot (1 + \tan^2 x) = \\
&= \sin(\tan x)\ , \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad .
\end{aligned}
$$

(b) *si provi che f è estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}$:* nel suo dominio di definizione f è continua essendo derivabile. Affinché $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sia continua ed estenda f basta che:

$$\varphi(x) = f(x)\ , \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \& \quad \exists \lim_{y \to \frac{\pi}{2}+k\pi} \varphi(y) = \varphi(\frac{\pi}{2} + k\pi);$$

poichè se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ si ha $\exists \lim_{y \to x} \varphi(y) = \lim_{y \to x} f(y) = f(x) = \varphi(x)$.

Quindi basta provare che: $\exists \lim_{y \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)} f(y) \ =_{def} L_k$,

e quindi definire: $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ L_k & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$

Per provare l'esistenza del limite di f nei punti in cui non è definita basta provare che esistono il limite destro ed il limite sinistro e sono eguali. Osservando inoltre che f è $\pi-$**periodica** basta dimostrare:

$$\exists \lim_{y \to \frac{\pi}{2}^-} f(y) = l_1 \ \ \& \ \ \exists \lim_{y \to (-\frac{\pi}{2})^+} f(y) = l_2 \ \ \& \ \ l_1 = l_2 \in \mathbf{R}.$$

Poichè la funzione $g(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$ è Riemann integrabile sugli intervalli limitati (è continua), ed è in modulo minore di $\frac{1}{1+t^2}$ non negativa e sommabile in senso generalizzato su tutto $\mathbf{R}$, si ha che anche $g(t)$ è sommabile in senso generalizzato su tutto $\mathbf{R}$. In particolare è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$, cioè:

$$\exists \lim_{y \to +\infty} \int_0^y \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt = l_1 \in \mathbf{R}.$$

Quindi poichè $\tan x \to +\infty$, se $x \to \frac{\pi}{2}^-$, si ha:

$$\exists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt = \lim_{y \to +\infty} \int_0^y \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt \ \in \mathbf{R}.$$

Analogamente si ha che esiste $\lim_{x \to (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = l_2 \in \mathbf{R}$, essendo $g(t)$ integrabile in senso improprio su $(-\infty, 0]$, e $\tan x \to -\infty$, se $x \to (-\frac{\pi}{2})^+$. Per provare che tali limiti sono uguali basta osservare che la funzione $g(t)$ è **dispari**, ottenendo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{-y} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt = -\int_{-y}^0 \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt = \int_{-y}^0 \frac{\sin(-t)}{1+(-t)^2}\, dt = -\int_y^0 \frac{\sin \tau}{1+\tau^2}\, d\tau \\
= \int_0^y \frac{\sin \tau}{1+\tau^2}\, d\tau
\end{aligned}
$$

(c) *chissá se l'estensione è derivabile su tutto* $\mathbf{R}$*?* : si considera l'estensione di f a tutto $\mathbf{R}$, che per quanto provato è:

$$\varphi(x) \;=\; \begin{cases} \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt & x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt & x = \frac{\pi}{2}+k\pi. \end{cases}$$

Si osserva che la funzione φ è derivabile nei punti $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ poichè è estensione di una funzione che è derivabile in tutto un intervallo aperto che contiene uno di tali x.

Poichè la funzione φ è $\pi-$**periodica**, per verificare se φ è derivabile nei punti $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$ potrebbe bastare provare che:

$$\exists\varphi'_-\big(\frac{\pi}{2}\big) \;\;\&\;\; \exists\varphi'_+\big(-\frac{\pi}{2}\big) \;\;\&\;\; \varphi'_-\big(\frac{\pi}{2}\big) = \varphi'_+\big(-\frac{\pi}{2}\big).$$

Si esamina l'esistenza di $\varphi'_-(\frac{\pi}{2})$. Dato $x < \frac{\pi}{2}$, si considera il rapporto incrementale di φ in $\frac{\pi}{2}$:

$$\Delta(x) \;=\; \frac{\varphi(x)-\varphi(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\tan x}^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\,dt.$$

Inizialmente si osserva che: $|\Delta(x)| \leq 1$, in quanto **il modulo dell'integrale è minore o eguale all'integrale del modulo**, e $|\sin t| \leq 1$, e $\int_{\tan x}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt = 1$.

Questa stima sembra non ottimale poichè non tiene conto delle oscillazioni del $\sin t$ tra valori negativi e valori positivi che potrebbero abbassare di molto il valore del modulo dell'integrale rispetto al valore dell'integrale del modulo. In effetti questa diminuzione è drastica, e viene messa in evidenza integrando **per parti**: $\quad\Delta(x) =$

$$\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\int_{\tan x}^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\frac{-\cos t}{1+t^2}\right]_{\tan x}^{+\infty} - \int_{\tan x}^{+\infty}\frac{2t\cos t}{(1+t^2)^2}\,dt\right\},$$

quindi: $\Delta(x) \;=\; \frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{-\cos(\tan x)}{1+(\tan x)^2} - \int_{\tan x}^{+\infty}\frac{2t\cos t}{(1+t^2)^2}\,dt\right\}$, per cui si ha la stima (si consideri $x > 0$ per avere $\tan x > 0$):

$$\begin{aligned} |\Delta(x)| &\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\left\{\frac{|\cos(\tan x)|}{1+(\tan x)^2} + \int_{\tan x}^{+\infty}\frac{|2t\cos t|}{(1+t^2)^2}\,dt\right\} \\ &\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\left\{\frac{1}{1+(\tan x)^2} + \int_{\tan x}^{+\infty}\frac{|2t|}{(1+t^2)^2}\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\left\{\frac{1}{1+(\tan x)^2} + \int_{1+(\tan x)^2}^{+\infty}\frac{1}{\tau^2}\,d\tau\right\} \\ &= 2\frac{(\cos x)^2}{\frac{\pi}{2}-x} = 2\frac{(\sin(\frac{\pi}{2}-x))^2}{\frac{\pi}{2}-x} \longrightarrow 0 \;\text{ se }\; x \to \frac{\pi}{2}^-. \end{aligned}$$

Quindi $\exists\varphi'_-(\frac{\pi}{2}) = 0$. In modo del tutto analogo si ha $\exists\varphi'_+(-\frac{\pi}{2}) = 0$. Quindi φ è derivabile anche in tutti i punti del tipo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, e la sua derivata è nulla.