Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

17 febbraio 2015

Esercizio 1. Sia $K : [0,2] \to [0,1]$ una funzione continua tale che $K(0) = 0$ e sia $T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ l'operatore definito da

$$Tu(x) = \int_0^1 K(x+y)u(y)\,dy.$$

per ogni $u \in C([0,1])$.

i) Mostrare che T è un operatore ben defintito, lineare e continuo.

ii) Mostrare che T è un operatore compatto.

iii) Data $f \in C([0,1])$, mostrare che esiste un'unica soluzione dell'equazione $u - Tu = f$.

Esercizio 2. Siano X, Y spazi di Banach e sia $A : X \to Y$ un operatore lineare bigettivo. Per ogni $x \in X$ definiamo

$$\|x\|_A = \|A(x)\|_Y.$$

i) Dimostrare che $\|\cdot\|_A$ è una norma su X.

ii) Dimostrare che $(X, \|\cdot\|_A)$ è uno spazio di Banach.

iii) Dare condizioni su A affinché la norma $\|\cdot\|_A$ sia equivalente a $\|\cdot\|_X$.

Esercizio 3. Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base hilbertiana di H. Consideriamo lo spazio

$$\mathcal{S} = \left\{ T \in \mathcal{L}(H) \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_H < +\infty \right\}.$$

i) Dimostrare che $\mathcal{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(H)$.

ii) Dire se $\mathcal{S}$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(H)$.

iii) Dimostrare che $\|T\|_{\mathcal{S}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_H$ è una norma su $\mathcal{S}$.

iv) Dimostrare che $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_{\mathcal{S}})$ è uno spazio di Banach.

v) Dimostrare che $\mathcal{S}$ è contenuto in $\mathcal{K}(H)$, cioè che ogni operatore in $\mathcal{S}$ è compatto.

Soluzione Esercizio 1.

i) Per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|T(u)(x)| \le \max_{z\in[0,2]} |K(z)| \|u\|_\infty. \tag{1}$$

Visto che $K \in C^0([0,2])$ si ha che per ogni $x_n \to x$ in $[0,1]$ e per ogni $y \in [0,1]$, $K(x_n + y) \to K(x + y)$. Per il Teorema di Lebesgue T è ben definito e si verifica che è lineare. La limitatezza segue subito da 1 passando al max su x.

ii) Presa $\{u_n\} \subset C^0([0,1])$ con $\|u_n\|_\infty \le 1$ si ha che $\|T(u_n)\|_\infty \le \|T\|$. Inoltre, usando l'uniforme continuità di K se ne deduce l'equicontinuità di $T(u_n)$. Infatti, fissato $\epsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|K(y_1) - K(y_2)| < \epsilon$ se $|y_1 - y_2| < \delta$. Presi $x, z \in [0,1]$ tali che $|x - z| < \delta$ si ha

$$|T(u_n)(x) - T(u_n)(z)| \le |\int_0^1 |K(x + y) - K(z + y)|u(y)\,dy| \le \epsilon\|u\|_\infty.$$

Si conclude quindi per il Teorema di Ascoli-Arzelà.

iii) Poiché T è compatto, per il Teorema dell'alternativa di Fredholm basta verificare che $I - T$ è iniettivo. Data u tale che $T(u) = u$, detto $\bar{x} \in [0,1]$ tale che $u(\bar{x}) = \max_{[0,1]} u$, a meno di scambiare u con $-u$, non è restrittivo supporre che $u(\bar{x}) \ge 0$. Tenuto conto che per ipotesi si ha $0 \le K(x + y) \le 1$, si ottiene

$$\max_{[0,1]} u = u(\bar{x}) = \int_0^1 K(\bar{x} + y)u(y)\,dy \le \int_{y\,:\,u(y)\ge 0} u(y)\,dy.$$

Si deve quindi avere necessariamente $u(x) = u(\bar{x})$ per ogni $x \in [0,1]$. A questo punto, se $u \ne 0$, si otterebbe $\int_0^1 K(x+y)\,dy = 1$ da cui $K(x) = 1$ per ogni $x \in [0,2]$, contraddicendo l'ipotesi $K(0) = 0$.

Soluzione Esercizio 2.

i) Per ogni $x \in X$ si ha $\|x\|_A \ge 0$, inoltre, se $\|x\|_A = 0$, dato che $\|\cdot\|_Y$ è una norma su Y, se ne deriva che $A(x) = 0$. L'iniettività di A implica poi che $x = 0$.

Preso $\lambda \in \mathbb{R}$, la linearità di A ed il fatto che $\|\cdot\|_Y$ è una norma su Y ci dicono che per ogni $x \in X$ vale $\|\lambda x\|_A = \|A(\lambda x)\|_Y = \|\lambda A(x)\|_Y = |\lambda|\|A(x)\|_Y = |\lambda|\|x\|_A$. Analogamente se $x, y \in X$, si ha $\|x+y\|_A = \|A(x+y)\|_Y = \|A(x)+A(y)\|_Y \le \|A(x)\|_Y + \|A(y)\|_Y = \|x\|_A + \|y\|_A$.

ii) Per ogni isomorfismo lineare $(X, \|\cdot\|_A)$ è uno spazio di Banach. Infatti presa $(x_n) \subset X$ di Cauchy in $(X, \|\cdot\|_A)$ si ha che $(A(x_n))$ è di Cauchy $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Per completezza di $(Y, \|\cdot\|_Y)$ esiste y_0 tale che $\|A(x_n) - y_0\|_Y \to 0$. Per la surgettività di A esiste x_0 tale che $y_0 = A(x_0)$; riscrivendo le condizioni sopra si ha $\|x_n - x_0\|_A = \|A(x_n) - A(x_0)\|_Y = \|A(x_n) - y_0\|_Y \to 0$.

iii) La condizione cercata è $A \in \mathcal{L}(X)$. Infatti se $\|\cdot\|_A$ è equivalente a $\|\cdot\|_X$ allora esiste $C > 0$ tale che $\|A(x)\|_Y = \|x\|_A \le C\|x\|_X$ per ogni $x \in X$. Viceversa se $A \in \mathcal{L}(X)$ allora vale la disuguaglianza precedente; in particolare grazie al teorema dell'applicazione aperta si ha anche che esiste $C' > 0$ tale che $C'\|x\|_X \le \|A(x)\|_Y = \|x\|_A$ per ogni $x \in X$.

Soluzione Esercizio 3.

i) Date $T, S \in \mathcal{S}$, utilizzando la disuguaglianza triangolare, per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \|Te_n + Se_n\|_H \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|_H + \sum_{n=1}^{\infty} \|Se_n\|_H \leq +\infty.$$

Si conclude passando al sup su N. Analogamente si dimostra che se $T \in \mathcal{S}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda T \in \mathcal{S}$.

ii) $\mathcal{S}$ non è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(H)$. Sia infatti $T : H \to \mathbb{R}$ definita da $T(e_n) = e_n/n$ per $n \geq 1$, ed estesa prima per linearità finita e poi a tutto H secondo la legge $T(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, e_n \rangle / n \, e_n$ per ogni $y \in H$. Si verifica facilmente che $T \notin \mathcal{S}$ ma T è limite (forte) in $\mathcal{L}(H)$ di $T_k := T \circ P^k$, dove P^k è la proiezione ortogonale sul generato di $e_1, \ldots, e_k$, $k \in \mathbb{N}$.

iii) Le proprietà di omogeneità e di subadditività della norma si verificano facilmente come nel punto *i)*. Rimane da dimostrare che se $T(e_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $T = 0$. Questo segue dal fatto che T è continua ed il generato di $(e_n)_n$ è denso.

iv) Sia $(T_k) \subset \mathcal{S}$ una successione di Cauchy rispetto a $\| \cdot \|_{\mathcal{S}}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato si ha $\|T_k(e_n) - T_h(e_n)\|_H \leq \|T_k - T_h\|_{\mathcal{S}}$, da cui $(T_k(e_n))_k$ è di cauchy in H. Sia $z_n = \lim_k T_k(e_n)$; definiamo formalmente $T : H \to H$ come $T(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle y, e_n \rangle z_n$. Si noti che $z_n = T(e_n)$, inoltre per ogni $\epsilon > 0$ fissato esiste $k_0 = k_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k, h \geq k_0$ si ha $\|T_k - T_h\|_{\mathcal{S}} \leq \epsilon$. In particolare per ogni $N \in \mathbb{N}$ fissato si ha

$$\sum_{n=1}^{N} \|T_k(e_n) - T_h(e_n)\|_H \leq \epsilon,$$

da cui, passando al limite in $h \to +\infty$, si ottiene per $k \geq k_0$

$$\sum_{n=1}^{N} \|T_k(e_n) - T(e_n)\|_H \leq \epsilon$$

e, passando al sup su N, per $k \geq k_0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|T_k(e_n) - T(e_n)\|_H \leq \epsilon.$$

Se ne deduce quindi che $\|T\|_{\mathcal{S}} < +\infty$ e $\|T_k - T\|_{\mathcal{S}} \to 0$. Rimane da dimostrare che T è ben definita ed appartiene a $\mathcal{L}(H)$. Per vedere questo basta notare che per ogni $y \in H$ si ha $\|y\|_H^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2$ e, per come è definito T, si ha anche

$$\|T(y)\|_H^2 \leq (\sum_{n=1}^{+\infty} \|\langle y, e_n \rangle z_n\|_H)^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \|z_n\|_H^2 \leq \|T\|_{\mathcal{S}}^2 \|y\|_H^2.$$

(nell'ultima disuguaglianza si è utilizzato che per ogni successione $\chi = (x_n)$, si ha $\|\chi\|_{\ell^2} \leq \|\chi\|_{\ell^1}$, ottenuta prima sulle $\chi = (x_n)$ con $\|\chi\|_{\ell^2} = 1$ e poi estesa per omogeneità).

$v)$ Dall'ultima disuguaglianza sopra si ha che $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{S}}$. In particolare per $T \in \mathcal{S}$, definita $T_k := T \circ P^k$, dove P^k è la proiezione ortogonale sul generato di $e_1, \ldots, e_k$, $k \in \mathbb{N}$, si ha anche che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|T_k(e_n) - T(e_n)\|_H = \sum_{k}^{+\infty} \|T(e_n)\|_H.$$

Se ne deriva che $\lim_k \|T_k - T\| \leq \lim_k \|T_k - T\|_{\mathcal{S}} = 0$. Essendo T limite forte di operatori di rango finito, T è anche compatto.