Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

1 luglio 2014

Esercizio 1. Sia X uno spazio di Banach reale e sia $\mathcal{L}(X)$ lo spazio delle applicazioni lineari e continue da X in sè. Per $N \in \mathbb{N}$ si consideri S_N in $\mathcal{L}(X)$ definito da

$$S_N(T) = \sum_{n=0}^{N} \frac{T^n}{n!},$$

dove $T^0 = I$ è l'identità in X e T^n, con $n > 0$, indica T composto con sé stesso n volte.

i) Mostrare che $\{S_N(T)\}$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$ e che è ben definito $\mathrm{e}^T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!}$.

ii) Mostrare che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T allora e^λ è autovalore di e^T.

iii) Mostrare che, se T è compatto, anche l'operatore $(\mathrm{e}^T - I)$ lo è.

iv) Dire se $T \to \mathrm{e}^T$ è continua come applicazione da $\mathcal{L}(X)$ in sè.

Esercizio 2. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $T : H \to H$ un operatore lineare e simmetrico, cioè tale che

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \text{per ogni } x, y \in H\,.$$

i) Mostrare che T è continuo.

ii) Mostrare che, se T è surgettivo, allora T è invertibile con T^{-1} continuo.

ii) Mostrare con un esempio T può essere iniettivo, ma non surgettivo.

Esercizio 3. Sia $H = H^1((0,1))$, munito della norma Hilbertiana

$$\|u\|_H^2 = \int_0^1 \left(u^2 + u'^2\right)\, dx$$

e sia $T : X \to \mathbb{R}$ l'operatore definito da

$$Tu = u(1) - u(0).$$

i) Mostrare che T è lineare e continuo.

ii) Calcolare la norma di T (si suggerisce di scrivere Tu nella forma $Tu = \langle u, v\rangle_H$ per qualche $v \in H$).

Soluzioni.

Soluzione Esercizio 1.

i) Dalla disuguaglianza
$$\|T \circ S\| \leq \|T\|\,\|S\|$$
si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$\|T^n\| \leq \|T\|^n$$
da cui si deduce la convergenza assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!}$ per confronto con $\mathrm{e}^{\|T\|}$.

Essendo $\mathcal{L}(X)$ completo si ha che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{n!}$ converge in $\mathcal{L}(X)$ per cui e^T è ben definito ed $\{S_N(T)\}$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(X)$.

Utilizzando le stesse disuguaglianze sopra questo stesso risultato si poteva ottenere maggiorando per $N, M \in \mathbb{N}$
$$\|S_N(T) - S_M(T)\| \leq \|\sum_{n=M\wedge N}^{M\vee N} \frac{T^n}{n!}\| \leq \sum_{n=M\wedge N}^{+\infty} \frac{\|T\|^n}{n!}.$$

ii) Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di T con relativo autovettore non nullo v. Allora
$$\mathrm{e}^T(v) = \lim_{N\to+\infty} S_N(T)(v) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} v = \mathrm{e}^{\lambda} v.$$

iii) Se T è compatto anche tutte le sue composizioni T^n con $n > 0$ sono compatte ed allo stesso modo le loro combinazioni lineari (vedi cap. 6 del Brezis). La compattezza di $(\mathrm{e}^T - I)$ segue quindi dal fatto che è limite in $\mathcal{L}(X)$ della successione di operatori compatti $S_N(T) - I$ (vedi cap. 6 del Brezis).

iv) Si osserva che per $n \in \mathbb{N}$ vale la stima
$$\|T^{n+1} - S^{n+1}\| \leq (\|T\| + \|S\|)^n \|T - S\|.$$

Questa segue facilmente per induzione: per $n = 0$ la stima è ovvia, presa valida per un $n \in \mathbb{N}$ si ha che
$$\|T^{n+2} - S^{n+2}\| = \|T \circ T^{n+1} - S \circ T^{n+1} + S \circ T^{n+1} - S \circ S^{n+1}\|,$$
da cui
$$\begin{aligned}\|T^{n+2} - S^{n+2}\| &\leq \|T - S\|\,\|T^{n+1}\| + \|S\|\,\|T^{n+1} - S^{n+1}\| \\ &\leq \|T - S\|(\|T\|^{n+1} + (\|T\| + \|S\|)^n \|S\|) \\ &\leq (\|T\| + \|S\|)^{n+1} \|T - S\|.\end{aligned}$$

Moltiplicando per $1/n!$ e sommando su n si ottiene

$$\|e^T - e^S\| \le e^{(\|T\|+\|S\|)}(\|T - S\|.$$

La continuità di $T \to e^T$ segue immediatamente dalla precedente stima di Lipschitzianità.

Soluzione Esercizio 2.

i) Grazie al teorema del grafico chiuso, è sufficiente mostrareche T è chiuso. Sia quindi $x_n \to x$ in H tale che $y_n = Tx_n \to y$ in H, dobbiamo mostrare che $Tx = y$. Ricordando che T è simmetrico, per ogni $z \in H$ si ha

$$\langle Tx, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n, Tz\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle y_n, z\rangle = \langle y, z\rangle,$$

da cui si ottiene l'uguaglianza $Tx = y$.

ii) Supponiamo che T sia surgettivo e mostriamo che T è anche iniettivo. Fissato $x \in H$, con $x \neq 0$, sia $y \in H$ tale che $Ty = x$. Si ha

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \|x\|^2 > 0.$$

Abbiamo mostrato che $Tx \neq 0$ per ogni $x \neq 0$, cioè che T è iniettivo, e quindi è anche invertibile. La continuità di T^{-1} segue subito dal teorema della mappa aperta.

iii) Sia $H = \ell^2$ e sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da

$$(Tx)_n = \frac{x_n}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \ell^2.$$

L'operatore T così definito è chiaramente iniettivo, ma non è surgettivo in quanto l'elemento $x_n = 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ non appartiene all'immagine di T.

Soluzione Esercizio 3.

i) La linearità di T è immediata. Per mostrare la continuità osserviamo che grazie dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$|Tu| = \left|\int_0^1 u'(x)dx\right| \le \int_0^1 |u'(x)|dx \le \|u'\|_{L^2((0,1))} \le \|u\|_H.$$

Questo mostra che T è continuo, con $\|T\|_{H'} \le 1$.

ii) Vogliamo scrivere il funzionale T come il prodotto scalare per un elemento di H, cioè

$$Tu = \int (uv + u'v') =< u, v >_H \qquad \forall u \in H,$$

per un opportuno elemento $v \in H$. In questo modo avremmo $\|T\|_{H'} = \|v\|_H$. Sia $V \in H^2((0,1)) \cap H^1_0((0,1))$ la soluzione del problema ai limiti

$$\begin{aligned} V'' &= V \qquad\qquad \text{in } (0,1), \\ V(0) &= V(1) = 1\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Prendendo $v = V' \in H$, per ogni $u \in H$ si ha

$$\int_0^1 uv dx = \int_0^1 uV' dx = u(1) - u(0) - \int_0^1 u'V dx$$

e quindi

$$\int_0^1 (uv + u'v')dx = u(1) - u(0) + \int_0^1 u'(V'' - V)dx = u(1) - u(0) = Tu.$$

Risolvendo il problema (1) per V, si ottiene

$$V(x) = \frac{e-1}{e^2-1}e^x + \frac{e^2-e}{e^2-1}e^{-x}\,,$$

da cui si ottiene

$$\|T\|_{H'} = \|v\|_H = \|V\|_H = \sqrt{\frac{2(e-1)}{e+1}}\,.$$