Prova scritta di Istituzioni di Analisi Matematica

12 aprile 2014

Esercizio 1. Si consideri l'operatore $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ definito da

$$T(x)_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostrare che T è un operatore lineare e continuo, e calcolarne la norma.

ii) Dire se T è iniettivo.

iii) Dire se T è compatto.

iv) Determinare gli autovalori di T.

SOLUZIONE.

i) La linearità di T segue subito dalla definizione. Dalla stima

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |T(x)_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n| + |x_{n+1}|}{2} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|}{2} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_{n+1}|}{2} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

segue la continuità di T e che $\|T\| \le 1$. Per vedere che $\|T\| = 1$ basta prendere il vettore x definito da $x_n = 1$ per ogni n.

ii) Vediamo che il nucleo di T non consta del solo vettore nullo. Sia $x \in \ell^\infty$ tale che $T(x) = 0$. Si ottengono le equazioni $x_n = -x_{n+1}$ per $n \in \mathbb{N}$, soddisfatte ad esempio dal vettore non nullo w definito da $w_n = (-1)^n$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

iii) Per $j \in \mathbb{N}$ sia e^j il vettore definito da $(e^j)_n = 1$ se $n = j$ e $(e^j)_n = 0$ altrimenti. Osserviamo che $T(w) = e^j$, dove $w_n = (-1)^{n+j+1}$ se $n < j$ e $w_n = (-1)^{n+j}$ se $n \ge j$. Poiché l'immagine di T contiene tutti i vettori e^j, T non può essere compatto.

iv) Imponendo $T(x) = \lambda x$ si ottengono le equazioni $x_{n+1} = (2\lambda - 1)x_n$ per $n \ge 1$, risolte da $x_n = (2\lambda - 1)^{n-1} x_1$ per $n \ge 1$. Ne deriva che gli autovalori di T sono i valori λ tali che $|2\lambda - 1| \le 1$, ossia $0 \le \lambda \le 1$.

Esercizio 2. Sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < 1\}$, sia $\lambda \geq 1$ e sia $T_\lambda : H^1_0(B) \to H^1_0(B)$ l'operatore

$$T_\lambda(f)(x) = \begin{cases} f(\lambda\, x) & \text{se } |x| < \dfrac{1}{\lambda} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) Mostrare che T_λ è un operatore lineare e continuo, e calcolarne la norma.

ii) Dire se $T_\lambda(f)$ tende a $T_1(f)$, per $\lambda \to 1$, per ogni $f \in H^1_0(B)$.

iii) Dire se T_λ tende a T_1, per $\lambda \to 1$, nello spazio $\mathcal{L}(H^1_0(B))$.

SOLUZIONE.

i) La linearità di T_λ segue subito dalla definizione. La continuità di T_λ segue dall'uguaglianza

$$\|T_\lambda(f)\|^2_{H^1_0(B)} = \lambda^{2-n} \int_B |\nabla f(x)|^2 \, dx = \lambda^{2-n} \|f\|^2_{H^1_0(B)},$$

da cui segue che la norma di T_λ è uguale a $\lambda^{1-\frac{n}{2}}$.

ii) Data $f \in C^1_c(B)$ calcoliamo

$$\|T_\lambda(f) - f\|^2_{H^1_0(B)} = \int_B |\lambda^2 \nabla f(\lambda x) - \nabla f(x)|^2 \, dx \to 0 \qquad \text{per } \lambda \to 1,$$

grazie al teorema di convergenza dominata. Sia ora $f \in H^1_0(B)$ e sia $f_n \in C^1_c(B)$ una successione che approssima f in $H^1_0(B)$. Si ha

$$\begin{aligned} \|T_\lambda(f) - T_1(f)\|_{H^1_0(B)} &\leq \|T_\lambda(f) - T_\lambda(f_n)\|_{H^1_0(B)} + \|T_\lambda(f_n) - f_n\|_{H^1_0(B)} + \|f_n - f\|_{H^1_0(B)} \\ &\leq \|T_\lambda(f_n) - f_n\|_{H^1_0(B)} + \left(1 + \lambda^{1-\frac{n}{2}}\right) \|f_n - f\|_{H^1_0(B)}, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\limsup_{\lambda \to 1} \|T_\lambda(f) - T_1(f)\|_{H^1_0(B)} \leq 2\|f_n - f\|_{H^1_0(B)}.$$

Mandando $n \to +\infty$ si ottiene la convergenza di $T_\lambda(f)$ a $T_1(f)$.

iii) Osserviamo che, se f ha supporto in $B \setminus B_{\frac{1}{\lambda}}$, allora $T_\lambda(f)$ ha supporto disgiunto da f. Ne segue che

$$\|T_\lambda(f) - T_1(f)\|^2_{H^1_0(B)} = \|T_\lambda(f)\|^2_{H^1_0(B)} + \|f\|^2_{H^1_0(B)} = (1 + \lambda^{2-n})\|f\|^2_{H^1_0(B)}.$$

Questo implica che T_λ non converge a T_1 in $\mathcal{L}(H^1_0(B))$ per $\lambda \to 1$.

Esercizio 3. Sia $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata, cioè esiste una costante $C > 0$ tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} b_n & \text{per } x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) Si mostri la convergenza debole di $\{f_n\}_n$ in $L^p([0, +\infty))$, con $p \in (1, +\infty)$, e debole* in $L^\infty([0, +\infty))$.

ii) Si determinino condizioni necessarie e sufficienti su $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ affinché si abbia convergenza debole in $L^1([0, +\infty))$.

iii) Si determinino condizioni necessarie e sufficienti su $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ affinché si abbia convergenza forte in $L^p([0, +\infty))$ per $p \in [1, +\infty)$.

SOLUZIONE.

i) Data $g \in L^q([0, +\infty))$, con $q \in [1, +\infty)$, si ha

$$\left| \int_0^\infty g f_n \, dx \right| \leq C \int_n^{n+1} |g| \, dx \leq C \left(\int_n^{n+1} |g|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Poiché $|g|^q \in L^1([0, +\infty))$, ne segue

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^\infty g f_n \, dx \right| \leq C \lim_{n\to+\infty} \left(\int_n^{n+1} |g|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} = 0,$$

che mostra la convergenza debole di f_n a 0 in $L^p([0, +\infty))$ per ogni $p \in (1, +\infty)$ e debole* in $L^\infty([0, +\infty))$.

ii) Sia f il limite debole di f_n e sia $g(x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n f_n(x) \in L^\infty([0, +\infty))$. Si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \, b_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty g f_n \, dx = \int_0^\infty f g \, dx \in \mathbb{R},$$

da cui segue $\lim_n b_n = 0$. Mostriamo ora che questa condizione è anche sufficiente. Data $g \in L^\infty([0, +\infty))$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^\infty g f_n \, dx \right| \leq \|g\|_{L^\infty} \lim_{n\to+\infty} |b_n| = 0.$$

iii) Se f_n converge a f in $L^p([0, +\infty))$, per quanto mostrato nei punti precedenti si ha necessariamente $f = 0$. Quindi $\lim_n \|f_n\|_{L^p} = \lim_n b_n = 0$. Viceversa, se $\lim_n b_n = 0$, allora $\lim_n \|f_n\|_{L^p} = \lim_n b_n = 0$, cioè f_n converge a 0 in $L^p([0, +\infty))$.