

**Equazioni alle Derivate Parziali - Corso di Laurea Magistrale in  
Matematica**

(A.A. 2020/2021)

**Assignment II, Scritto 11.01.2021**

**Problema 1.** Data  $g(x) \in C([0, \infty))$ , tale che  $g(x) = 0$  per  $x \geq 2$ , trovare una soluzione del problema

$$\begin{aligned} \partial_t v - \frac{1}{2} \partial_x^2 v &= 0 \quad \text{for } t > 0, x > 0 \\ v(0, x) &= g(x), \quad v(t, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Vedere se la soluzione trovata é nello spazio

$$C^2(U) \cap C(\bar{U}), \quad U = \{(t, x); t > 0, x > 0\}.$$

**Idea della soluzione.** Sia

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \geq 0; \\ -g(-x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

We now solve the whole space problem with initial condition  $\tilde{g}$ , using the representation formula for the heat equation in  $\mathbb{R}$ . The result is

$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \tilde{g}(y) dy = (*)$$

where  $\tilde{g}(y)$  is the odd extension of  $g$ .

We now change integration variables from  $y$  to  $-y$ , with the result

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-\frac{|x+y|^2}{2t}} \tilde{g}(-y) dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|(-x)-y|^2}{2t}} \tilde{g}(y) dy = -v(t, -x)$$

So, the solution is odd the the boundary condition is satisfied. The above solution can be written in terms of the fundamental solution  $F(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$ . Namely, simple calculation show that

$$v(t, x) = \int_0^{\infty} G(t, x, y) g(y) dy, \quad \text{with } G(t, x, y) = F(t, x-y) - F(t, x+y).$$

La soluzione é in  $C^2(U)$ , ma non é in  $C(U)$  quando non é soddisfatta la condizione di compatibilitá  $g(0) = 0$ . □

**Remark 1.** *Regole durante lo scritto:*

1. *La videocamera deve essere sempre accesa*
2. *Tenere lo smartphone sempre visibile sul tavolo, il cellulare si usa per vedere il testo del compito i primi 5-10 minuti e poi deve essere SPENTO e CAPOVOLTO*
3. *Durante lo svolgimento della prova é vietato l'utilizzo di appunti, libri, della tastiera del PC/Mac/tablet o del mouse a meno che non sia richiesto dal docente;*
4. *Il docente sorveglia gli studenti durante la prova e risponde in chat ad eventuali domande.*
5. *Dopo svolgimento del esercizio (quando scade il tempo di 1 ora per lo svolgimento di esercizio) lo studente utilizza SOLO CELLULARE per fare la foto e preparare UNICO pdf,jpg file . Lo studente dopo aver preparato file deve restare seduto con web accesa e senza scrivere sul foglio. Lo studente NON DEVE INSERIRE FILE IN TEAM prima che il docente glielo comunichi.*
6. *La prova dura 1 ora. SOLO dopo 1 ora lo studente puo scattare foto del suo elaborato.*
7. *Prima di inviare la soluzione TRAMITE CELLULARE lo studente contatta il docente, il docente controlla il foglio della soluzione, se necessario farà una foto. Solo dopo lo studente può inviare la soluzione.*