Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quarto scritto A.A. 2015/16 — 22 novembre 2016

Nome e Cognome:

---

1) Siano M ed N due varietà differenziabili.

(i) Dimostra che se i fibrati tangenti TM e TN sono banali allora anche $T(M \times N)$ è banale.
(ii) Trova M ed N tali che $T(M \times N)$ è banale ma TM non lo è. [*Suggerimento:* puoi dare per noto che TS^2 non è banale.]

2) Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$, e sia $\Phi\colon \mathrm{Hom}(V,W) \to V^* \otimes W$ l'isomorfismo canonico tale che $\Phi^{-1}(\psi \otimes w)(v) = \psi(v)w$ per ogni $\psi \in V^*$, $w \in W$ e $v \in V$. Per ogni $L \in \mathrm{Hom}(V,W)$ poni

$$\rho(L) = \min\Bigl\{k \in \mathbb{N} \mid \Phi(L) = \sum_{j=1}^{k} \psi^j \otimes w_j, \text{con } \psi^j \in V^*,\ w_j \in W\Bigr\} .$$

Dimostra che $\rho(L)$ è uguale al rango di L.

3) Sia (M,g) una varietà Riemanniana. Sia $\tau\colon M \to M$ un'isometria con un punto fisso $p \in M$.

(i) Supponi esista un vettore $v \in T_pM$ non nullo tale che $d\tau_p(v) = v$. Dimostra che p non è un punto fisso isolato di τ.
(ii) Supponi che $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_M$ e che p sia un punto fisso isolato di τ. Dimostra che $d\tau_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$.
(iii) Supponi che τ sia come in (ii), e poniamo $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_pM$, dove $\mathcal{E}$ è il dominio dell'applicazione esponenziale. Dimostra che $v \in \mathcal{E}_p$ implica $-v \in \mathcal{E}_p$ e $\tau\bigl(\exp_p(v)\bigr) = \exp_p(-v)$.
(iv) Supponi che per ogni $p \in M$ esista un'isometria τ_p che soddisfa le ipotesi del punto (ii). Dimostra che $\mathcal{E} = TM$.