Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Primo scritto A.A. 2014/15 — 19 giugno 2015

Nome e Cognome:

---

1) Considera i sottoinsiemi

$$S_1 = \left\{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 4\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} + (x^4)^2 + (x^5)^2 + 3 = 0\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^4)^2 + (x^5)^2 + (x^6)^2 = 1\right\},$$

e la funzione $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$ data da

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) = (x^1(2 + x^4), x^2(2 + x^4), x^3(2 + x^4), x^5, x^6)\ .$$

(i) Dimostra che S_1 e S_2 sono sottovarietà compatte di $\mathbb{R}^5$ e di $\mathbb{R}^6$, rispettivamente.
(ii) Dimostra che la restrizione di f a S_2 definisce un diffeomorfismo tra S_2 ed S_1.
(iii) Calcola i gruppi di coomologia di de Rham di S_1.

2) Sia M una varietà differenziabile n-dimensionale, e sia $S \subset M$ una $(n-1)$-sottovarietà embedded. Per ogni $p \in S$, identifichiamo lo spazio tangente T_pS con la sua immagine in T_pM tramite il differenziale dell'inclusione $S \hookrightarrow M$.
(i) Sia $\alpha \in A^1(M)$ una 1-forma differenziale su M tale che $T_pS \subseteq \ker \alpha_p$ per ogni $p \in S$. Mostra che

$$(\alpha \wedge d\alpha)_p = O$$

per ogni $p \in S$ [*Suggerimento:* scegli opportune coordinate locali nei punti di S].
(ii) Supponiamo ora che M sia orientata e sia $\omega \in A^n(M)$ una forma di volume associata all'orientazione. Dimostra che per ogni $(n-1)$-forma $\varphi \in A^{n-1}(M)$, esiste un unico campo vettoriale $X^\varphi \in \mathcal{T}(M)$ tale che

$$\varphi_p(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \omega_p(v_1, \ldots, v_{n-1}, X^\varphi_p)$$

per ogni $p \in M$ e ogni $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_pM$. Dimostra inoltre che l'applicazione $\Theta\colon A^{n-1}(M) \to \mathcal{T}(M)$ data da $\Theta(\varphi) = X^\varphi$ è un isomorfismo.

3) Sia $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera unitaria, considerata con la metrica Riemanniana g^o indotta dalla metrica Euclidea di $\mathbb{R}^{n+1}$. Indichiamo con $\pi\colon S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il rivestimento liscio a due fogli dato da

$$\pi(x^0, \ldots, x^n) = [x^0 : \cdots : x^n].$$

Scrivi, usando coordinate locali, l'unica metrica Riemanniana g su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che $\pi^*g = g^o$.