Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Quarto scritto A.A. 2013/14 — 26 settembre 2013

Nome e Cognome:

---

1) Sia $n \geq 1$, e r, $s > 0$. Poniamo

$$M_{r,s} = \{(p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|rp - sq\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ .$$

(i) Dimostra che $M_{r,s}$ è una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
(ii) Calcola i gruppi di coomologia di de Rham di $M_{r,s}$.

2) Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango r su una varietà M, e ∇ una connessione su E. Fissiamo un sistema di riferimento locale $\{E_1, \ldots, E_r\}$ per E, definito su un aperto $U \subset M$.

(i) Dimostra che esistono delle 1-forme $\omega_i^j \in A^1(U)$ tali che $\nabla_X E_i = \omega_i^j(X) E_j$ per ogni $X \in \mathcal{T}(U)$, dove stiamo usando la convenzione di Einstein.

Poniamo $\kappa_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j \in A^2(U)$ e $\sigma(\nabla) = \kappa_i^i \in A^2(U)$, dove continuiamo a usare la convenzione di Einstein. Indichiamo con $\pi_1: M \times \mathbb{R} \to M$ la proiezione sulla prima coordinata, e con $\pi_*: A^\bullet(M \times \mathbb{R}) \to A^{\bullet-1}(M)$ l'operatore di integrazione lungo le fibre, definito localmente in questo modo:

$$\pi_*(f\, dt \wedge \pi_1^* dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \pi_1^* dx^{i_{k-1}}) = \left[\int_0^1 f(\cdot, t)\, dt\right] dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k-1}} \ , \quad \pi_*(f\, \pi_1^* dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \pi_1^* dx^{i_k}) = O \ ,$$

dove $(x^1, \ldots, x^n)$ sono coordinate locali su M e t è una coordinata (globale) su $\mathbb{R}$.

(ii) Posto $\tilde{E}_{p,t} = E_p$ per ogni $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, indichiamo con $\tilde{E}$ l'unione disgiunta degli spazi vettoriali $\tilde{E}_{p,t}$ al variare di $(p,t) \in M \times \mathbb{R}$, e con $\tilde{\pi}: \tilde{E} \to M \times \mathbb{R}$ la proiezione associata. Dimostra che $\tilde{E}$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale di rango r su $M \times \mathbb{R}$ tale che a ogni sezione locale $V \in \mathcal{E}(U_0)$ di E è possibile associare una sezione locale $\mathrm{ext}(V) \in \tilde{\mathcal{E}}(U_0 \times \mathbb{R})$ ponendo $\mathrm{ext}(V)(p,t) = V(p)$ per ogni $p \in U_0$ e $t \in \mathbb{R}$, dove $U_0 \subseteq M$ è un aperto di M.
(iii) Siano ∇^0 e ∇^1 due connessioni su E. Dimostra che ponendo $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \mathrm{ext}(V) = \mathrm{ext}\big((1-t)\nabla^0_X V + t \nabla^1_X V\big)$, dove $\tilde{X}(p,t) = X(p,t) + f(p,t)\partial_t \in T_pM \oplus T_t\mathbb{R} \cong T_{(p,t)}(M \times \mathbb{R})$, e $\tilde{\nabla}_{\partial_t} \mathrm{ext}(V) = O$, dove t è la coordinata globale su $\mathbb{R}$, è possibile definire una connessione sul fibrato $\tilde{\pi}: \tilde{E} \to M \times \mathbb{R}$.
(iv) Poniamo $\sigma(\nabla^0, \nabla^1) = \pi_*\big(\sigma(\tilde{\nabla})\big) \in A^1(U)$, dove $\sigma(\tilde{\nabla}) \in A^2(U \times \mathbb{R})$ è la 2-forma costruita a partire dalla connessione $\tilde{\nabla}$. Dimostra che $\sigma(\nabla^1) - \sigma(\nabla^0) = d\sigma(\nabla^0, \nabla^1)$. [*Nota:* si può dimostrare che la forma $\sigma(\nabla)$ non dipende dal particolare riferimento locale scelto, e quindi definisce una 2-forma globale $\sigma(\nabla) \in A^2(M)$. Allora questo esercizio dice che la classe di coomologia di $\sigma(\nabla)$ non dipende dalla connessione scelta ma solo dal fibrato vettoriale. Un opportuno multiplo di questa classe di coomologia è la *prima classe di Chern* del fibrato E.]

3) Sia $r^2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $r^2(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$, e denota con g_0 l'usuale metrica Euclidea di $\mathbb{R}^2$. Sia inoltre data una funzione $f: [0, \infty) \to (0, +\infty)$ di classe C^∞, e considera la metrica Riemanniana $g = (f \circ r^2) g_0$ su $\mathbb{R}^2$. Infine, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, sia $\gamma_v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata da $\gamma_v(t) = tv$, e per ogni $\rho > 0$ sia $\sigma_\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata da $\sigma_\rho(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t)$.

(i) Dimostra che, per ogni $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, esiste un'isometria di $(\mathbb{R}^2, g)$ il cui luogo dei punti fissi coincide con l'immagine di γ_v.
(ii) Deduci che, per ogni $v \in \mathbb{R}^2$, un'opportuna riparametrizzazione di γ_v è una geodetica per la metrica g.
(iii) Calcola i simboli di Christoffel di g (in funzione di x^1, x^2, r^2, f e f').
(iv) Deduci che σ_ρ è una geodetica per g se e solo se $\rho^2 f'(\rho^2) = -f(\rho^2)$.
(v) Nel caso in cui $f(y) = 4/(1+y)^2$, mostra che esistono almeno 3 geodetiche per g che congiungono $(1,0)$ con $(-1,0)$ e che hanno la stessa lunghezza. [*Nota:* in realtà ne esistono infinite, e sono tutte minimizzanti.]