Istituzioni di Geometria

Prof. Marco Abate

Settimo scritto A.A. 2011/12 — 17 gennaio 2013

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\pi\colon M \to N$ un'applicazione differenziabile surgettiva fra varietà e tale che $d\pi_p\colon T_pM \to T_{\pi(p)}N$ sia surgettivo per ogni $p \in M$. Se $q \in N$, l'insieme $\pi^{-1}(q) \subseteq M$ sarà detto *fibra* di π su q.

Dimostra che se l'applicazione $F\colon M \to S$ è differenziabile e costante sulle fibre di π allora esiste un'unica applicazione differenziabile $\tilde{F}\colon N \to S$ tale che $\tilde{F} \circ \pi = F$.

2) Sia M una varietà differenziabile di dimensione n, sia $N = T^*M$ il fibrato cotangente di M, e denota con $\pi\colon N \to M$ la usuale proiezione. Questo esercizio definisce una 1-forma naturale θ su N. In un punto $p = (x, \xi) \in N$ (dove $x \in M$ e ξ è un elemento di T_x^*M), se $v \in T_pN$ poniamo

$$\theta_p(v) = \xi(d\pi_p(v)) \; .$$

(i) Siano $(x^1, \ldots, x^n)$ coordinate locali su un aperto U di M, e siano $(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ le corrispondenti coordinate locali su $\pi^{-1}(U) \subseteq N$ (così che un elemento $(x, \xi) \in \pi^{-1}(U)$ abbia coordinate $(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ se x ha coordinate $(x^1, \ldots, x^n)$ e $\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i dx^i$). Determina la scrittura di θ rispetto alle coordinate locali su N appena introdotte, e verifica che θ è effettivamente una 1-forma differenziale su N.

(ii) Sia $\omega = d\theta \in \Omega^2(N)$. Per ogni $p \in N$, mostra che l'applicazione bilineare antisimmetrica

$$\omega_p\colon T_p^*N \times T_p^*N \to \mathbb{R}$$

è non degenere.

Ogni 1-forma $\mu \in \Omega^1(M)$ può essere pensata come una sezione $M \to N$ del fibrato cotangente, che indicheremo con $F_\mu\colon M \to N$.

(iii) Mostra che, per ogni $\mu \in \Omega^1(M)$, si ha $F_\mu^*\theta = \mu$.

Una sottovarietà Z di N si dice *Lagrangiana* se $\omega_p(v, w) = 0$ per ogni $p \in Z$, $v, w \in T_pN$.

(iv) Sia $\omega \in \Omega^1(M)$. Mostra che ω è chiusa se e solo se l'immagine di $F_\omega\colon M \to N$ è una sottovarietà Lagrangiana di N.

3) Sia (M, g) una varietà Riemanniana, e sia $(\mathbb{R}, h)$ l'usuale struttura Riemanniana su $\mathbb{R}$. Sia $N = M \times \mathbb{R}$, e poni su N la struttura differenziale prodotto, in modo che per ogni punto $(p, t_0) \in M \times \mathbb{R}$ vi sia un'identificazione canonica $T_{(p,t_0)}N \cong T_pM \oplus T_{t_0}\mathbb{R}$. Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una funzione liscia positiva, e sia $\widetilde{g}$ la metrica Riemanniana su N definita come segue:

$$\widetilde{g}_{p,t_0}((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \varphi(t_0)^2 \cdot g_p(v_1, w_1) + h_{t_0}(w_1, w_2) \qquad \text{per ogni } (v_1, w_1), (v_2, w_2) \in T_pM \oplus T_{t_0}\mathbb{R} \; .$$

(i) Sia d la distanza Riemanniana indotta da $\widetilde{g}$ su N. Mostra che, per ogni $p \in M$ e $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, si ha $d((p, t_0), (p, t_1)) = |t_1 - t_0|$. Deducine che la curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ definita da $\gamma(t) = (p, t)$ è una geodetica di $(N, \widetilde{g})$.

(ii) Siano $x = (x_1, \ldots, x_n)$ coordinate locali su M, e siano Γ_{ij}^k i corrispondenti simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita di (M, g). Indica inoltre con x_{n+1} l'usuale coordinata di $\mathbb{R}$, in modo che $(x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ siano coordinate locali su N, e siano $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita di $(N, \widetilde{g})$ rispetto a queste coordinate. Mostra che

$$\begin{cases} \widetilde{\Gamma}_{ij}^k(x, x_{n+1}) = \Gamma_{ij}^k(x) & \text{se } 1 \le i, j, k \le n, \\ \widetilde{\Gamma}_{ij}^{n+1}(x, x_{n+1}) = -\varphi(x_{n+1})\varphi'(x_{n+1}) g_{ij}(x) & \text{se } 1 \le i, j \le n, \\ \widetilde{\Gamma}_{i,n+1}^k(x, x_{n+1}) = \widetilde{\Gamma}_{n+1,i}^k(x, x_{n+1}) = \frac{\varphi'(x_{n+1})}{\varphi(x_{n+1})} \cdot \delta_i^k & \text{se } 1 \le i, k \le n, \\ \widetilde{\Gamma}_{ij}^k(x, x_{n+1}) = 0 & \text{se almeno due indici coincidono con } n+1. \end{cases}$$

(iii) Sia I un intervallo, sia $\alpha\colon I \to M$ una curva C^∞ in M, e sia $t_0 \in \mathbb{R}$. Mostra che la curva $\beta\colon I \to N$ definita da $\beta(t) = (\alpha(t), t_0)$ è una geodetica di N se e solo se α è una geodetica di M e $\varphi'(t_0) = 0$.