Istituzioni di Geometria

Secondo scritto — 2 febbraio 2010

Nome e Cognome:

---

1) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 ,$$

e poniamo $M = f^{-1}(1)$.

(i) Dimostra che M è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$.
(ii) Dimostra che M è diffeomorfa a $S^2 \times \mathbb{R}$.
(iii) Dimostra che il fibrato tangente di M è banale.

2) Sia M una varietà n-dimensionale. Dato $1 \le r \le n$, siano $\omega^1, \ldots, \omega^r \in A^1(M)$ delle 1-forme linearmente indipendenti in ogni punto di M. Siano poi $\eta^1, \ldots, \eta^r \in A^1(M)$ qualsiasi. Dimostra che

$$\sum_{i=1}^{r} \eta^i \wedge \omega^i \equiv O$$

se e solo se esistono $g^i_h \in C^\infty(M)$, con $g^h_i \equiv g^i_h$ per i, $h = 1, \ldots r$, tali che

$$\forall i = 1, \ldots, r \qquad\qquad \eta^i = \sum_{h=1}^{r} g^i_h \omega^h .$$

3) Sia M una varietà Riemanniana, e indichiamo con $\pi\colon TM \to M$ la proiezione. Vogliamo definire una metrica Riemanniana su TM. Sia $(p; v)$ un punto di TM (cioè $p \in M$ e $v \in T_pM$), e V_1, $V_2 \in T_{(p;v)}(TM)$. Per $j = 1, 2$ scegliamo $\tilde\sigma_j\colon I \to TM$ curve con $\tilde\sigma_j(0) = (p; v)$ e $\tilde\sigma'(0) = V_j$. Poniamo inoltre $\sigma_j = \pi \circ \tilde\sigma_j$; nota che $\tilde\sigma_j$ ammette una naturale interpretazione come campo vettoriale lungo σ_j. Definiamo allora

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \langle d\pi_{(p;v)}(V_1), d\pi_{(p;v)}(V_2) \rangle_p + \langle D\tilde\sigma_1(0), D\tilde\sigma_2(0) \rangle_p , \tag{1}$$

dove $\langle \cdot , \cdot \rangle_p$ è la metrica Riemanniana di M e $D\tilde\sigma_j$ è la derivata covariante di $\tilde\sigma_j \in \mathcal{T}(\sigma_j)$.

(i) Dimostra che (1) definisce effettivamente una metrica Riemanniana su TM.
(ii) Il *sottofibrato verticale* $\mathcal{V}$ di $T(TM)$ è il nucleo del differenziale della proiezione: $\mathcal{V} = \operatorname{Ker} d\pi$. Diremo che una curva $\tilde\tau\colon I \to TM$ è *orizzontale* se e solo se $\tilde\tau'(t)$ è ortogonale a $\mathcal{V}_{\tilde\tau(t)}$ per ogni $t \in I$. Dimostra che $\tilde\tau$ è orizzontale se e solo se $\tilde\tau$ è un campo vettoriale parallelo lungo la curva $\tau = \pi \circ \tilde\tau$.