Geometria e Topologia Differenziale

Quinto scritto dell'A.A. 2003-04 — 7 febbraio 2005

Nome e Cognome:

---

1) Sia $\sigma: I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, e di curvatura κ_σ. Supponiamo che σ sia contenuta in piano H passante per l'origine, e sia $\mathbf{b}_0$ il versore binormale di σ.

Sia $\theta \in [0, 2\pi)$ e consideriamo l'applicazione $\gamma_\theta: I_\theta \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\gamma_\theta(s) = \sigma(s \sin\theta) + s\cos\theta \mathbf{b}_0,$$

dove $I_\theta = \{s \in \mathbb{R} \mid s\sin\theta \in I\}$ se $\theta \neq 0, \pi$, mentre $I_0 = I_\pi = \mathbb{R}$.

(i) Dimostra che γ_θ è una curva regolare, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.
(ii) Calcola la curvatura di γ_θ in funzione di θ e di κ_σ.
(iii) Per $\theta \neq 0, \pi$, mostra che γ_θ è biregolare e calcola la sua torsione in funzione di θ e di κ_σ.
(iv) Per quali valori di θ la curva γ_θ è piana?

2) Siano H, σ e $\mathbf{b}_0$ come nell'esercizio precedente. Supponiamo anche che $\sigma: I \to \sigma(I)$ sia un omeomorfismo. Consideriamo l'applicazione $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(s,t) = \sigma(s) + t\,\mathbf{b}_0.$$

(i) Dimostra che $S := f(I \times \mathbb{R})$ è una superficie regolare.
(ii) Dimostra che $f: I \times \mathbb{R} \to S$ è un'isometria.
(iii) Calcola la curvatura gaussiana e la curvatura media di S, in funzione di κ_σ.
(iv) Sia $\theta \in [0, 2\pi)$ e γ_θ la curva dell'esercizio precedente. Dimostra che γ_θ è contenuta in S ed è una geodetica in S.
(v) *Facoltativo.* Sia $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $\eta: J \to S$ una geodetica di S. Dimostra che esiste $\theta \in [0, 2\pi)$ tale che η sia una riparametrizzazione di una restrizione di γ_θ a un intervallo aperto contenuto in I_θ.

3) Sia $S = S^2$ la sfera unitaria, e per ogni $p \in S^2$ indichiamo con $\pi_p: \mathbb{R}^3 \to T_pS^2$ la proiezione ortogonale sul piano tangente a S^2 in p. Sia ξ il campo di vettori su S^2 dato da

$$\xi(p) = \pi_p\left((x+2)\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Trova i punti singolari di ξ su S^2, e calcola l'indice di ξ in ogni punto singolare.