Geometria e Topologia Differenziale

Terzo scritto — 4 giugno 2007

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata per lunghezza d'arco. La curva σ si dice *di Bertrand* se esiste una curva biregolare $\sigma_1\colon I \to \mathbb{R}^3$ (non necessariamente parametrizzata per lunghezza d'arco) diversa da σ con la seguente proprietà: per ogni $t \in I$, la retta che congiunge $\sigma(t)$ con $\sigma_1(t)$ coincide sia con la retta normale di σ in $\sigma(t)$ sia con la retta normale di σ_1 in $\sigma_1(t)$ (in particolare, il versore normale di σ in $\sigma(t)$ è uguale al versore normale di σ_1 in $\sigma_1(t)$, o al suo opposto). In tal caso, la curva σ_1 si dice una *compagna di Bertrand* di σ.

(i) Mostra che, se σ è una curva di Bertrand con compagna σ_1, la distanza tra $\sigma(t)$ e $\sigma_1(t)$ è indipendente da t.

(ii) Nelle ipotesi del punto precedente, mostra che l'angolo formato dal versore tangente di σ in $\sigma(t)$ e dal versore tangente di σ_1 in $\sigma_1(t)$ non dipende da t; deducine che l'angolo formato dal versore binormale di σ in $\sigma(t)$ e dal versore tangente di σ_1 in $\sigma_1(t)$ non dipende da t.

(iii) Mostra che, se σ è una curva di Bertrand con curvatura κ e torsione τ mai nulle, allora esistono costanti reali non nulle a, b tali che $a\kappa(t) + b\tau(t) = 1$ per ogni t.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata da un campo normale $N\colon S \to S^2$, sia $f\colon S \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, e sia $f \cdot N\colon S \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f \cdot N(p) = f(p)N(p)$. Sia $p \in S$, e sia $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale di T_pS tale che $v_1 \wedge v_2 = N(p)$. Sia infine $K(p)$ la curvatura di Gauss di S in p.

(i) Dimostra che vale la seguente uguaglianza:

$$K(p) = \frac{\langle d(f \cdot N)_p(v_1) \wedge d(f \cdot N)_p(v_2), (f \cdot N)(p)\rangle}{f^3(p)}.$$

Sia ora $a > 0$, e sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2(x^2 + y^2) + z^2 = a^2\}$.

(ii) Dimostra che S è una superficie regolare, e determina un campo di versori normali su S.

(iii) Posto $p = (x, 0, z) \in S$, determina una base ortonormale di T_pS.

(iv) Mostra che, se $p = (x, y, z) \in S$, la curvatura di Gauss di S in p è data da

$$K(p) = \frac{a^4(a^2(x^2 + y^2) + z^2)}{(a^4(x^2 + y^2) + z^2)^2} = \frac{a^2}{(1 + (a^2 - 1)(x^2 + y^2))^2}.$$

(*Suggerimento:* usa la funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = \sqrt{a^4(x^2 + y^2) + z^2}$.)

3) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie compatta definita dall'equazione

$$x^4 + y^4 + z^4 - 1 = 0,$$

e sia $X\colon S \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale dato da

$$X(p) = \pi_p\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

per ogni $p \in S$, dove $\pi_p\colon \mathbb{R}^3 \to T_pS$ è la proiezione ortogonale sul piano tangente a S in p.

(i) Determina i punti singolari di X.

(ii) Dimostra che l'applicazione $F : S \to S^2$ data da $F(p) = p/||p||$ è un diffeomorfismo tra S e la sfera unitaria S^2.

(iii) Calcola l'indice dei punti singolari di S.