Geometria e Topologia Differenziale

Secondo scritto — 16 febbraio 2009

Nome e Cognome: Anno d'immatricolazione:

---

1) Sia $\sigma\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

(i) Dimostra che tutte le rette tangenti affini di σ sono equidistanti da un dato punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se σ è un segmento o un arco di circonferenza.

(ii) Dimostra che tutte le rette normali affini di σ sono equidistanti da un dato punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se la curvatura $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ di σ è data da

$$\kappa(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as+b}}$$

per opportuni a, $b \in \mathbb{R}$.

2) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie data dalla rotazione attorno all'asse delle x della curva grafico della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin(x) + 2$. Sia $C = S \cap \{z = 0\} \cap \{y > 0\}$.

(i) Dimostra che S è una superficie regolare (non compatta).

(ii) Dimostra che C è supporto di una curva regolare p.r.l.a. σ.

(iii) Dimostra che σ è una geodetica di S.

(iv) Calcola la prima forma fondamentale di S lungo la curva σ.

(v) Calcola la seconda forma fondamentale di S nel punto $P = (0, 2, 0)$.

3) Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, e sia $T \subset \mathbb{R}^3$ la superficie di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sia $C = S \cap T$.

(i) Dimostra che S e T sono superfici regolari.

(ii) Dimostra che C è il supporto di due curve regolari p.r.l.a. σ_1 e σ_2, dove σ_1 è contenuta nel semispazio $z > 0$ mentre σ_2 è contenuta nel semispazio $z < 0$.

(iii) Dimostra che σ_1 non è una geodetica né per S né per T.

(iv) Calcola l'integrale della curvatura Gaussiana di S sulla regione regolare limitata il cui bordo è formato da σ_1 e σ_2.