

ANNO ACCADEMICO 2013–14

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA

TERZO COMPITINO — TESTO B

PROFF. MARCO ABATE E ROSETTA ZAN

6 giugno 2014

Nome e cognome _____

Matricola _____

ISTRUZIONI: Si possono utilizzare libri di testo, dispense e appunti. Non si possono invece utilizzare calcolatrici, cellulari, computer, palmari, tablet e simili.

Giustificare tutte le risposte: risposte che si limitano a qualcosa del tipo “0.5” o “No” non saranno valutate anche se corrette.

Per superare la prima parte non bisogna sbagliarne più di un terzo; per superare la seconda parte bisogna farne almeno metà. Perché il compitino sia sufficiente occorre che siano sufficienti sia la prima che la seconda parte. In particolare, se la prima parte è insufficiente l'intero compitino è insufficiente (e la seconda parte non viene corretta).

In caso di copiatura accertata durante il compito o in fase di correzione, sono annullati sia il compito di chi ha copiato sia quello di chi ha fatto copiare.

Scrivere le risposte negli spazi appositamente bianchi, o sul retro dei fogli. Se serve altro spazio, si possono consegnare ulteriori fogli purché sia ben chiaro dove si trovano le risposte alle varie domande.

Scrivere nome, cognome e numero di matricola su tutti i fogli che si consegnano!

PRIMA PARTE

Esercizio 1. Calcola il seguente integrale definito:

$$\int_{-2}^1 (10x^4 + 3x^2) dx .$$

Esercizio 2. Determina, spiegando perché, se la seguente frase è vera o falsa: *La funzione $y(t) = e^{-4t} + 7$ è una soluzione dell'equazione differenziale $y' = -4y$.*

Esercizio 3. Un sottospazio vettoriale di dimensione 2 può avere un sistema di generatori composto da 3 vettori? Se pensi che la risposta sia affermativa, fai un esempio; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.

SECONDA PARTE

Esercizio 4. La portata $a(t)$ d'acqua di una diga, misurata a partire dall'istante $t = 0$ di apertura della diga, dipende dal tempo secondo la funzione

$$a(t) = t \cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right),$$

dove T è il tempo necessario perché la diga si richiuda. Determina la quantità totale di acqua passata attraverso la diga dall'istante $t = 0$ di apertura all'istante $t = T$ di chiusura. [*Suggerimento:* per passare dalla portata alla quantità d'acqua totale occorre fare un integrale.]

Esercizio 5. La legge di Newton sul raffreddamento dei corpi dice che la variazione di temperatura T' di un corpo a contatto con un fluido tenuto a temperatura costante T_f è proporzionale alla differenza fra T_f e la temperatura T del corpo.

- (i) Indicando con λ la costante di proporzionalità, scrivi l'equazione differenziale che descrive il raffreddamento dei corpi secondo la legge di Newton.
- (ii) Sapendo che la temperatura del fluido è $T_f = 20^\circ\text{C}$ e che la temperatura iniziale del corpo è $T_0 = 50^\circ\text{C}$ determina la temperatura $T(t)$ del corpo al tempo $t > 0$ supponendo che si abbia $\lambda = 2$. Dopo quanto tempo il corpo raggiunge la temperatura $T_1 = 35^\circ\text{C}$?
- (iii) Trova il valore di λ sapendo che se la temperatura del fluido è $T_f = 10^\circ\text{C}$ e la temperatura iniziale del corpo è $T_0 = 70^\circ\text{C}$ allora il corpo raggiunge la temperatura $T_1 = 30^\circ\text{C}$ al tempo $t = 4 \log 3$.
- (iv) Determina, se esiste, il limite a cui tende la temperatura $T(t)$ del corpo quando t tende all'infinito. Questo limite dipende dal valore di λ ?

Esercizio 6. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ risolvi il seguente sistema lineare, trovando le soluzioni (quando esistono) in funzione di a :

$$\begin{cases} 2y + 2az = 2 , \\ 5y + 5z = 5a , \\ ax + az = a . \end{cases}$$