Geometria e Topologia Differenziale

Secondo compitino A.A. 2004/05 — 29 aprile 2005

Nome e Cognome:

---

1) Consideriamo le superfici regolari

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Sia $F \colon H \to S$ l'applicazione definita da

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2z^2}}(x, y, -z).$$

(i) Mostra che F è un'applicazione differenziabile.
(ii) Sia $p_0 = (\sqrt{5}, 0, 2) \in H$. Scrivi una base del piano tangente a H in p_0, e mostra che $T_{p_0}H = T_{F(p_0)}S$.
(iii) Scrivi la matrice che rappresenta dF_{p_0} rispetto alla base scelta.
(iv) Calcola la curvatura gaussiana di H in p_0.

2) Sia $\phi \colon (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da

$$\phi(u, v) = (u \cos v, 2u \sin v, u^2).$$

(i) Mostra che $S = \phi((0, +\infty) \times \mathbb{R})$ è una superficie regolare, e che ϕ è una parametrizzazione globale per S.
(ii) Per ogni $p \in S$, scrivi la matrice della prima e seconda forma fondamentale di S in p rispetto alla base di T_pS indotta dalla parametrizzazione ϕ.