Elementi di Geometria Differenziale

Secondo compitino — 21 maggio 2004

Nome e Cognome:

---

1) Date due connessioni lineari ∇ e $\tilde{\nabla}$ su una varietà M, poniamo $B = \tilde{\nabla} - \nabla$.

(i) Dimostra che $B \in \mathcal{T}_2^1(M)$.

Definiamo allora S, $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ ponendo

$$S(v,w) = \frac{1}{2}\big(B(v,w) + B(w,v)\big) \qquad \text{e} \qquad A(v,w) = \frac{1}{2}\big(B(v,w) - B(w,v)\big).$$

(ii) Dimostra che $2A = \tilde{\tau} - \tau$, dove $\tilde{\tau}$ (rispettivamente, τ) è la torsione di $\tilde{\nabla}$ (rispettivamente, ∇).

(iii) Dimostra che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a) ∇ e $\tilde{\nabla}$ hanno le stesse geodetiche (cioè ogni geodetica di ∇ è anche geodetica di $\tilde{\nabla}$, e viceversa);
- (b) $B(v,v) = O$ per ogni $v \in TM$;
- (c) $S \equiv O$;
- (d) $B \equiv A$.

(iv) Dimostra che ∇ e $\tilde{\nabla}$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione se e solo se $\nabla \equiv \tilde{\nabla}$.

(v) Dimostra che esiste un'unica connessione simmetrica ∇^* che ha le stesse geodetiche di ∇.

Diremo che ∇ e $\tilde{\nabla}$ sono *riferite proiettivamente* se per ogni geodetica σ di ∇ esiste un cambiamento di parametro h tale che $\sigma \circ h$ sia una geodetica di $\tilde{\nabla}$.

(vi) Dimostra che due connessioni simmetriche ∇ e $\tilde{\nabla}$ sono riferite proiettivamente se e solo se esiste una 1-forma $\varphi \in \mathcal{T}^*(M)$ tale che $\tilde{\nabla} - \nabla = \varphi \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \varphi$.

2) Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria con la metrica indotta dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^3$, e sia $M = S^2 \times S^2$ considerata con la metrica prodotto.

(i) Dimostra che la curvatura sezionale di M è non-negativa.

Una sottovarietà $N \subset M$ è *totalmente geodetica* se per ogni $p \in N$ e $v \in T_pN$ la geodetica di M uscente da p in direzione v è completamente contenuta in N. Diremo invece che N è *piatta* se il tensore di curvatura della metrica indotta è identicamente nullo.

(ii) Trova una sottovarietà N di M totalmente geodetica, piatta e diffeomorfa a un 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

3) Sia M una varietà Riemanniana completa, $p \in M$, $v \in T_pM$ di lunghezza unitaria, e $\sigma_v\colon [0, +\infty) \to M$ la geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco con $\sigma_v(0) = p$ e $\dot{\sigma}_v(0) = v$. Sia

$$t_0(v) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid d\big(p, \sigma_v(t)\big) = t\}.$$

Se $t_0(v) < +\infty$, diremo che $\sigma_v(t_0)$ è un *punto di taglio* di σ_v rispetto a p. Il *luogo di taglio* di M rispetto a p è l'insieme

$$C(p) = \{\sigma_v(t_0) \mid v \in T_pM, \|v\|_p = 1, \sigma_v(t_0) \text{ punto di taglio di } \sigma_v \text{ rispetto a } p\}.$$

(i) Dimostra che $\sigma_v(t_0)$ è un punto di taglio per $p = \sigma_v(0)$ se e solo se una delle due condizioni seguenti si verifica per $t = t_0$ e nessuna delle due si verifica per valori di t minori di t_0:

- (a) $\sigma_v(t)$ è coniugato a p lungo σ_v;
- (b) esiste una geodetica $\tau \neq \sigma_v$ da p a $\sigma_v(t)$ tale che $L(\tau) = L(\sigma_v)$.

[*Nota:* dai per buono il seguente fatto: una geodetica non è mai minimizzante oltre il primo punto coniugato.]

Sia $\mathcal{C} = \{v \in TM \mid \|v\| = 1, t_0(v) < +\infty\}$, e definiamo $\rho\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$ ponendo $\rho(v) = d\Big(\pi(v), \sigma_v\big(t_0(v)\big)\Big)$, dove $\pi\colon TM \to M$ è la proiezione canonica e d è la distanza Riemanniana.

(ii) Dimostra che ρ è una funzione continua, e deduci che $C(p)$ è un insieme chiuso.

(iii) Dimostra che $\mathrm{inj\,rad}(p) = d\big(p, C(p)\big)$.

(iv) Sia $q \in C(p)$ tale che $d(p,q) = d\big(p, C(p)\big)$. Dimostra che o esiste una geodetica minimizzante σ da p a q tale che q sia coniugato a p lungo σ, oppure esistono esattamente due geodetiche minimizzanti σ e τ parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco da p a q tali che $\dot{\sigma}\big(d(p,q)\big) = -\dot{\tau}\big(d(p,q)\big)$.