MATEMATICA E STATISTICA — CORSO B
PROF. MARCO ABATE

SECONDOCOMPITINO

5 febbraio 2008

1. Parte I

Esercizio 1.1. *Calcola il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{2x}.$$

Soluzione.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+3/x)}{2x} == \lim_{x\to+\infty} \frac{1+3/x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 1.2. *Le tue misurazioni ti hanno fornito tre dati* x_1, x_2, x_3 *compresi tra 12 e 13. La loro deviazione standard può essere uguale a 7? Se sì fai un esempio; se no, spiega perché.*

Soluzione. Essendo i dati tutti compresi tra 12 e 13, anche la loro media $\bar{x}$ sarà compresa tra 12 e 13. Quindi tutti gli errori $\bar{x} - x_i$ saranno in modulo minori o uguali a 1, per cui la varianza sarà minore o uguale a 1, e la deviazione standard sarà quindi minore di 1 (e non può essere uguale a 7).

Esercizio 1.3. *I tre punti* $(1,5)$, $(2,3)$ *e* $(3,0)$ *sono allineati? Perché?*

Soluzione. I tre punti non sono allineati poiché la retta $y = -2x + 7$ passa per i punti $(1,5)$ e $(2,3)$, ma non passa per il punto $(3,0)$.

2. Parte II

Esercizio 2.1. *Dopo aver tolto dal forno una torta di mele, ne misuri la temperatura e ottieni le seguenti coppie di dati:* $(5,95)$, $(7,84)$, $(15,20)$, *dove la coppia* $(5,95)$ *indica che dopo* 5 *minuti la torta ha una temperatura di* 95 *gradi centigradi. Dalle tue conoscenze di fisica (e di cucina), supponi che la funzione che lega le due quantità sia quadratica.*

(1) *Trova l'espressione esplicita della funzione quadratica il cui grafico passa per idati.*
(2) *Per che intervallo di valori tale funzione può effettivamente rispecchiare il fenomeno preso in considerazione?*

Soluzione. Cerchiamo una funzione quadratica $f(t) = at^2 + bt + c$ che passi per i punti $(5,95)$, $(7,84)$ e $(15,20)$. Sostituendo i valori e risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} 25a + 5b + c &= 95 \\ 49a + 7b + c &= 84 \\ 225a + 15b + c &= 20\,, \end{cases}$$

otteniamo la parabola

$$f(t) = -\frac{t^2}{4} - \frac{5}{2}t + \frac{455}{4}.$$

Cerchiamo ora di determinare i valori temporali per i quali questa funzione può effettivamente descrivere il raffreddamento della torta. Osserviamo che la parabola f ha vertice nel punto $t = -10/2 = -5$. Ricordando che una parabola, con il coefficiente di t^2 negativo, è una funzione crescente per valori di t minori del vertice, potremmo concludere che la nostra funzione può rispecchiare il fenomeno in esame per $t \geq -5$. Non conoscendo però le condizioni di raffreddamento della torta all'interno del forno, che è un ambiente tipicamente più caldo dell'ambiente esterno, è più prudente considerare solo i tempi $t \geq 0$. Supponendo inoltre che la temperatura dell'ambiente sia ad esempio 20 gradi centigradi, dobbiamo escludere dal nostro intervallo di tempo anche i valori di t per cui $f(t) < 20$, che corrisponde alla condizione $t > 15$. In conclusione, possiamo dire che la funzione f descrive il raffreddamento della torta nell'intervallo di tempo $t \in [0, 15]$.

Esercizio 2.2. *Scrivi l'espressione esplicita di una funzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua e tale che* $f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Soluzione. Partiamo dalla funzione $f(x) = -e^{-x}$, che verifica la condizione $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Aggiungendo a f la costante 1, otteniamo la funzione $f(x) = 1 - e^{-x}$, che verifica anche la condizione $f(0) = 0$. Infine, osservando che $\lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$, possiamo definire la funzione $f(x) = 2 - 2e^{-x}$, che verifica tutte le condizioni richieste.

Esercizio 2.3. *Fai alcuni esperimenti, calcolando due quantità (indicate da x e y). I risultati delle misurazioni, altri ottenuti da questi tramite semplici operazioni, e le relative medie sono riportati nella tabella sottostante.*

(1) *Per vedere se y dipende linearmente da x, determina la retta di regressione. L'approssimazione è buona?*
(2) *Interpola ora i dati supponendo che y abbia un comportamento polinomiale in x (cioè si comporti come ax^q, con $x > 0$). Qual è la migliore interpolazione che puoi trovare? L'approssimazione è buona?*

Dati	x	y	$\log x$	$(\log x)^2$	x^2	$\log x \log y$	$x \log y$	$y \log x$	$\log y$	$(\log y)^2$	xy	y^2
	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
	2	1	0.69	0.48	4	0	0	0.69	0	0	2	1
	3	3	1.1	1.21	9	1.21	3.3	3.3	1.1	1.21	9	9
	4	6	1.39	1.92	16	2.48	7.17	8.32	1.79	3.21	24	36
	5	10	1.61	2.59	25	3.71	11.51	16.09	2.3	5.3	50	100
	6	25	1.79	3.21	36	4.85	16.25	26.88	2.71	7.33	90	225
	7	20	1.95	3.79	49	5.83	20.97	38.92	3	8.97	140	400
	8	40	2.08	4.32	64	7.67	29.51	83.18	3.69	13.61	320	1600
	9	80	2.2	4.83	81	9.63	39.44	175.78	4.38	19.2	720	6400
	10	90	2.3	5.3	100	10.36	45	207.23	4.5	20.25	900	8100
Medie	5.5	26.6	1.51	2.77	38.5	4.57	17.31	56.04	2.35	7.91	225.6	1687.2

Soluzione.

(1) Applicando il metodo dei minimi quadrati alle coppie di dati (x, y) elencate in tabella, otteniamo la retta di interpolazione $y = \bar{m}x + \bar{d}$, dove

$$\bar{m} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \simeq 9.6\,, \qquad \bar{d} = \bar{y} - \bar{m}\bar{x} \simeq -26.2\,.$$

Visto che il corrispondente coefficiente di Pearson è

$$CP = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}} \simeq 0.88\,,$$

possiamo concludere che l'interpolazione lineare non è una buona approssimazione.

(2) Facendo il cambio di variabili $\tilde{x} = \log x$, $\tilde{y} = \log y$, la relazione $y = ax^q$ diventa $\tilde{y} = q\tilde{x} + \log a$. Calcoliamo q e $\log a$ attraverso il metodo dei minimi quadrati, utilizzando i dati riportati in tabella, e otteniamo

$$\begin{aligned} q &= \frac{\overline{\log x \log y} - \overline{\log x}\;\overline{\log y}}{\overline{(\log x)^2} - \left(\overline{\log x}\right)^2} \simeq 2.13\,, \\ \log a &= \overline{\log y} - q\,\overline{\log x} \simeq -0.87\,, \qquad a \simeq e^{-0.87} \simeq 0.42\,. \end{aligned}$$

Visto che il corrispondente coefficiente di Pearson è

$$CP = \frac{\overline{\log x \log y} - \overline{\log x}\;\overline{\log y}}{\sqrt{\overline{(\log x)^2} - \left(\overline{\log x}\right)^2}\sqrt{\overline{(\log y)^2} - \left(\overline{\log y}\right)^2}} \simeq 0.96\,,$$

possiamo concludere che l'interpolazione polinomiale ottenuta è una buona approssimazione.