Secondo scritto

8 luglio 2010

1 Parte 1

Esercizio 1.1. Facciamo riferimento alle pagine 22 e 23 del libro di testo. Quando si ha a che fare con la moltiplicazione o la divisione di misure bisogna fare attenzione, poiché gli errori potrebbero influire sul risultato. Se l'errore relativo è piccolo (minore di 10^{-1}) allora il valore stimato del prodotto (o del quoziente) è approssimativamente uguale al prodotto (o al quoziente) dei valori stimati. La prima cosa da controllare, quindi, è che l'errore relativo sia piccolo. Indicheremo con $e_{r,L}$ l'errore relativo della misura dello spazio, e con $e_{r,v}$ l'errore relativo della misura della velocità. Calcoliamoli:

$$e_{r,L} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40} \quad e_{r,v} = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}.$$

Vale quindi il discorso fatto sopra. Per trovare la distanza percorsa L, si moltiplicano la velocità v ed il tempo di percorrenza t; quindi, per trovare il tempo di percorrenza si divide la distanza percorsa L per la velocità v. Il tempo stimato è quindi:

$$t \simeq 200\,\mathrm{km} \cdot \frac{1}{40}\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{km}} = 5\,\mathrm{h}.$$

Dobbiamo ora calcolare l'errore assoluto. Nel caso di errori relativi piccoli, sappiamo che l'errore relativo del prodotto (o del quoziente) è circa uguale alla somma degli errori relativi dei fattori, ed è quindi $3/40$. L'errore assoluto sulla stima del tempo sarà quindi:

$$e_{\mathrm{ass}} \simeq 5\mathrm{h} \cdot \frac{3}{40} = \frac{900}{40}\mathrm{min} = \frac{45}{2}\mathrm{min} = 22\,\mathrm{min}\ 30\,\mathrm{sec}.$$

Quindi la misura del tempo è approssimativamente data da:

$$5\,\mathrm{h} \pm (22\,\mathrm{min}\ 30\,\mathrm{sec}).$$

Esercizio 1.2. Rimandiamo alla sezione sui logaritmi del vostro libro (pag. 241). I logaritmi sono definiti solo sui numeri strettamente positivi, quindi per determinare il dominio della funzione dobbiamo chiedere che $4\log_2 x - 1 > 0$, cioè che $\log_2 x > 1/4$. Applicando l'esponenziale in base 2 (funzione crescente iniettiva) a entrambi i membri della disequazione otteniamo $x > 2^{1/4}$. Il dominio della funzione $f(x)$ è quindi $(2^{1/4}, +\infty)$.

Studiamo ora la disequazione $\log_2(4\log_2 x - 1) \geq 0$; poichè la base del logaritmo è maggiore di 1 questa diseguaglianza è equivalente a $4\log_2 x - 1 \geq 1$, cioè

$\log_2 x \geq 1/2$. Applicando l'esponenziale in base 2 a entrambi i membri otteniamo che $x \geq 2^{1/2}$. Poiché $2^{1/2} > 2^{1/4}$ questa soluzione è contenuta nel dominio di definizione della funzione (la disequazione ha senso solo dove la funzione è definita), e quindi $f(x) \geq 0$ per $x \in [2^{1/2}, +\infty)$.

Esercizio 1.3. Per il primo teorema fondamentale del calcolo (pag. 385 del vostro libro di testo) abbiamo che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Abbiamo che la funzione $\cos(t^{t^4} - 2)$ è continua su $\mathbb{R}$, quindi:

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \cos(t^{t^4} - 2)dt = \cos(x^{x^4} - 2).$$

2 Parte 2

Esercizio 2.1. Definiamo una variabile aleatoria discreta X come $X = i + j + k$, dove i,j e k sono le tre variabili aleatorie discrete che ci danno rispettivamente il numero di punte della prima stella, della seconda stella e della terza stella. La consegna dell'esercizio ci chiede di calcolare $P(X = 12)$, $P(X = 15)$, $P(X \geq 14)$ e $P(X \geq 17)$. Inoltre, siccome le tre stelle marine sono scelte a caso, il numero di punte i della prima stella , il numero di punte j della seconda stella ed il numero di punte k della terza stella sono indipendenti.

Calcoliamo $P(X = 12)$. L'unico modo in cui possiamo scrivere 12 come somma di tre numeri i, j, k che possono prendere i valori 4, 5, 6 è $12 = 4+4+4$. Di conseguenza

$$P(X = 12) = P(i = 4, j = 4, k = 4) = P(i = 4) \cdot P(j = 4) \cdot P(k = 4) = \left(\frac{1}{20}\right)^3.$$

Calcoliamo ora $P(X = 15)$. In questo caso, i modi in cui possiamo scrivere 15 come somma di tre numeri compresi fra 4 e 6 sono due: $15 = 5 + 5 + 5$ e $15 = 6 + 5 + 4$. Bisogna però notare che, mentre per la proprietà commutativa l'ordine dei sommandi non cambia il risultato, l'ordine con cui vengono pescate le stelle marine ha per noi importanza: per esempio, le due triplette $i = 6$, $j = 5$, $k = 4$ e $i = 6$, $j = 4$, $k = 5$ danno luogo allo stesso valore di X ma sono per noi due eventi distinti. Siccome possiamo permutare tre elementi in $3! = 6$ modi diversi (potete fare riferimento all'esempio 2.47 a pag.82 del vostro libro di testo), il numero dei modi diversi in cui possiamo sommare 4, 5 e 6 è, appunto, 6. Quindi:

$$\begin{aligned} P(X = 15) &= 6 \cdot P(i = 6)P(j = 5)P(k = 4) + P(i = 5)P(j = 5)P(k = 5) \\ &= 6 \cdot \left(\frac{1}{20} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{15}{100}\right) + \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{548}{1000} = \frac{137}{250}. \end{aligned}$$

Per determinare $P(X \geq 14)$ calcoliamo invece la probabilità del complementare. Infatti $P(X \geq 14) = 1 - P(X = 13) - P(X = 12)$. Abbiamo già calcolato la probabilità $P(X = 12)$ e quindi dobbiamo solo calcolare la probabilità $P(X = 13)$. In quanti modi diversi possiamo scrivere 13 come somma di tre numeri che variano tra 4, 5 e 6? In un solo modo, come $13 = 4 + 4 + 5$. Come abbiamo notato prima, dobbiamo tenere presente l'ordine in cui peschiamo le stelle marine; dobbiamo quindi trovare in quanti modi diversi possono essere sommati due 4 ed un 5. Siccome due cifre sono uguali, il numero dei modi diversi si ottiene dividendo il numero totale ($3! = 6$) di permutazioni di tre cifre per il numero di modi ($2! = 2$) con cui possiamo permutare le due cifre uguali. Dunque otteniamo $3!/2! = 3$ modi diversi, che infatti sono $5 + 4 + 4$, $4 + 5 + 4$ e $4 + 4 + 5$. Ne segue che

$$\begin{aligned} P(X \geq 14) &= 1 - 3 \cdot P(i = 4)P(j = 4)P(k = 5) - P(X = 12) \\ &= 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{8}{10}\right) - \left(\frac{1}{20}\right)^3 = 1 - \frac{49}{8000}. \end{aligned}$$

Rimane da calcolare $P(X \geq 17) = P(X = 17) + P(X = 18)$. Abbiamo innanzitutto che $17 = 6 + 6 + 5$, mentre $18 = 6 + 6 + 6$. Per il discorso fatto sopra, a proposito dei possibili modi di sommare 3 numeri di cui 2 uguali abbiamo quindi:

$$P(X = 17) = 3 \cdot P(i = 6)P(j = 6)P(k = 5) = 3 \cdot \left(\frac{15}{100}\right)^2 \cdot \frac{8}{10} = \frac{54}{1000}.$$

Calcoliamo anche $P(X = 18)$:

$$P(X = 18) = \left(\frac{15}{100}\right)^3 = \left(\frac{3}{20}\right)^3 = \frac{27}{8000}.$$

Quindi:

$$P(X \geq 17) = \frac{54}{1000} + \frac{27}{8000} = \frac{459}{8000}.$$

Esercizio 2.2. Rimandiamo alla sezione sulle funzioni sinusoidali del vostro libro, a pag. 273. Vogliamo una funzione sinusoidale

$$N_p(t) = A\cos\big(\omega(t - t_0)\big) + y_0$$

che soddisfi le condizioni del problema. Sappiamo che il periodo è 7 anni; quindi

$$\omega = \frac{2\pi}{7}.$$

Il testo ci fornisce il valore massimo $y_0 + A = 60\,000$ e il valore minimo $y_0 - A = 20\,000$ di N_p; quindi

$$y_0 = \frac{60\,000 + 20\,000}{2} = 40\,000 \quad \text{e} \quad A = \frac{60\,000 - 20\,000}{2} = 20\,000.$$

Rimane da calcolare la fase t_0, sapendo che la popolazione di cani della prateria raggiunge il suo massimo due anni prima della popolazione dei coyote. Calcoliamo perciò quando la funzione N_c raggiunge il suo massimo. Sappiamo che la funzione seno è una funzione periodica, di periodo 2π che ha massimo in $\pi/2$ e minimo in $3\pi/2$. La funzione N_c avrà quindi massimo nei punti t che soddisfano l'equazione

$$\frac{2\pi}{7} \cdot t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Da questo si ricava $t = 7/4 + 7k$, dove k è un numero intero. Siccome N_p deve avere massimo 2 anni prima di N_c, i punti di massimo di N_c devono essere

$$\frac{7}{4} + 7k - 2 = 7k - \frac{1}{4}.$$

La fase cercata t_0 è il primo punto di massimo non negativo, che si ottiene per $k = 1$; quindi $t_0 = 27/4$, e la funzione sinusoidale cercata è

$$N_p(t) = 20\,000 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{27}{4}\right)\right) + 40\,000.$$

Questo non è l'unico modo possibile per scrivere questa funzione. Siccome il coseno è periodico di periodo 2π, possiamo sommare $2\pi = \frac{2\pi}{7} \cdot \frac{28}{4}$ all'argomento del coseno senza cambiare niente e otteniamo

$$N_p(t) = 20\,000 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\left(t + \frac{1}{4}\right)\right) + 40\,000.$$

Oppure potevamo usare la formula (5.18) del libro di testo e la periodicità del seno ottenendo

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{27}{4}\right)\right) &= \cos\left(\frac{2\pi}{7}t - \frac{10\pi}{7} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}t - \frac{10\pi}{7} + 2\pi\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}(t+2)\right),\end{aligned}$$

per cui

$$N_p(t) = 40000 + 20000 \sin\biggl(\frac{2\pi}{7}(t+2)\biggr).$$

Deve esservi chiaro che non sono tre funzioni diversi, ma tre modi diversi di scrivere la *stessa* funzione!

Notate infine che si poteva ottenere quest'ultima formula anche ragionando come abbiamo fatto all'inizio ma partendo da una funzione sinusoidale generica della forma

$$N_p(t) = A \sin\bigl(\omega(t - t_0)\bigr) + y_0.$$

Esercizio 2.3. Prima di tutto, cerchiamo di capire quale sia l'insieme di definizione della funzione. Ad un primo sguardo, sembrerebbe che i valori di T per cui la funzione non è definita siano $T = 0$ e $T = -1/15$. Il primo punto è dove non è definita la funzione $1/T$ al denominatore, mentre il secondo punto è dove si annulla il denominatore. Ma attenzione: per $T = 0$ si annulla anche il numeratore, per cui questo punto va esaminato con maggiore attenzione. Studiamo il limite della funzione per T che tende a 0:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to 0} \frac{2T}{3 + 0.2/T} &= \lim_{T\to 0} \frac{2T}{1/T(3T + 0.2)} \\ &= \lim_{T\to 0} \frac{1}{1/T}\frac{2T}{(3T+0.2)} = \lim_{T\to 0} \frac{2T^2}{3T + 0.2} = 0.\end{aligned}$$

Quindi è naturale definire v anche per $T = 0$ ponendo $v(0) = 0$; il punto 0 è ciò che viene detto una discontinuità eliminabile. La cosa è resa anche più chiara dal fatto che i conti appena fatti ci dicono anche che

$$v(T) = \frac{2T^2}{3T + 0.2} = \frac{10T^2}{15T + 1}. \tag{1}$$

In questa forma è molto semplice studiare il segno della funzione. Il fattore al numeratore infatti non influisce sul segno della funzione: per ogni T abbiamo che $T^2 \geq 0$. Il segno della funzione dipende quindi solo dal segno del denominatore: questo è positivo per $T > -1/15$ e negativo per $T < -1/15$. Dalla funzione in questa forma vediamo anche che l'unico valore di T per cui la funzione si annulla è $T = 0$.

Studiamo ora il limite per T che tende a $(-1/15)^+$. Siccome il numeratore è strettamente positivo in $-1/15$, dove invece il denominatore si annulla, il limite sarà $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del denominatore. Siccome il denominatore è positivo per $T > -1/15$ e negativo per $T < -1/15$ otteniamo

$$\lim_{T \to (-1/15)^+} \frac{10T^2}{15T+1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{T \to (-1/15)^-} \frac{10T^2}{15T+1} = -\infty.$$

Studiamo ora i limiti a $+\infty$ ed a $-\infty$ della funzione, nella sua forma (1). Abbiamo

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{10T^2}{15T+1} = \lim_{T \to +\infty} \frac{10T^2}{T(15+1/T)} = \lim_{T \to +\infty} \frac{10T}{15+1/T} = +\infty.$$

Nello stesso modo si dimostra che il limite per $T \to -\infty$ è $-\infty$.

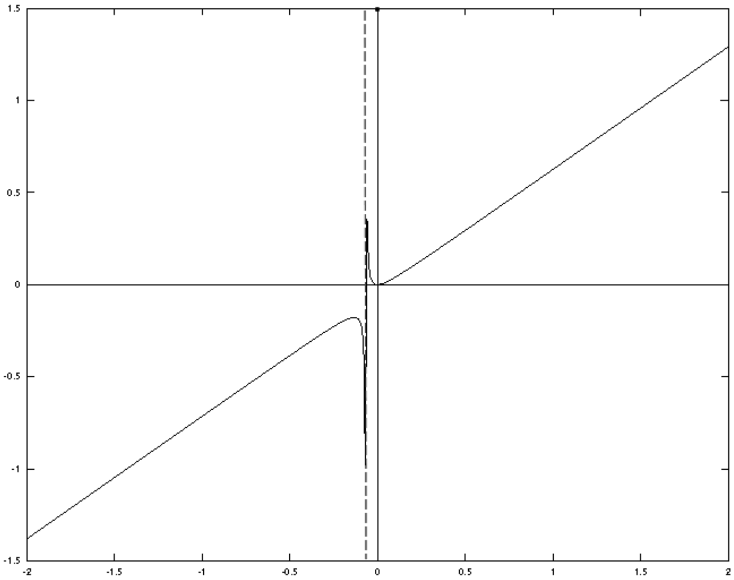
Studiamo ora la derivata della funzione, usando di nuovo la forma (1). Calcoliamo la derivata usando la formula di derivazione del quoziente:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{10T^2}{15T+1}\right) = \frac{20T \cdot (15T+1) - 15 \cdot 10T^2}{(15T+1)^2} = \frac{150T^2 + 20T}{(15T+1)^2}.$$

Calcoliamo ora gli zeri della derivata. La derivata si annulla in 0 ed in $-2/15$. Per studiarne il segno, possiamo notare come stavolta sia il denominatore a non contribuire, in quanto $(15T+1)^2$ è sempre positivo. Dunque il segno dipende solo dal segno del numeratore $150T^2 + 20T$, che è positivo per $T < -2/15$ o $T > 0$ ed è negativo per $-2/15 < T < -1/15$ o $-1/15 < T < 0$. Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dT}\left(\frac{150T^2 + 20T}{(15T+1)^2}\right) \\
&\quad = \frac{(300T+2)(15T+1)^2 - (150T^2+20T) \cdot 2 \cdot 15 \cdot (15T+1)}{(15T+1)^4} \\
&\quad = \frac{20}{(15T+1)^3}.
\end{aligned}$$

Come si può notare, la derivata seconda non si annulla mai ed il suo segno è determinato dal segno del denominatore $(15T+1)^3$. Avremo perciò che la derivata seconda è positiva per $T > -1/15$ e negativa per $T < -1/15$. Il grafico della funzione sarà quindi il seguente.



Studiamo ora la seconda consegna dell'esercizio. Quello che ci sta chiedendo è di studiare la funzione composta $v\big(T(t)\big)$ dove $T(t)$ è la funzione che ci dà la temperatura in funzione del tempo in secondi. Il testo della domanda ci dice che nell'istante t_0 considerato si ha $T(t_0) = 200\,°\mathrm{K}$ e $T'(t_0) = 1\,°\mathrm{K}$ al secondo. La regola di derivazione delle funzioni composte ci dice che

$$\frac{d}{dt}\big(v\big(T(t)\big)\big) = \frac{dv}{dT}\big(T(t)\big)\frac{dT}{dt}(t).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(v\big(T(t_0)\big)\big) &= v'\big(T(t_0)\big)T'(t_0) = v'(200)\cdot 1 \\ &= \frac{150\cdot 200^2 + 20\cdot 200}{(15\cdot 200+1)^2} = \frac{6\,004\,000}{9\,006\,001} \simeq 0.67. \end{aligned}$$