ANNO ACCADEMICO 2015–16

SCIENZE GEOLOGICHE E SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

MATEMATICA
PRIMO COMPITINO
SOLUZIONE DI ALCUNI ESERCIZI

PROFF. MARCO ABATE E MARGHERITA LELLI-CHIESA

PRIMA PARTE

Esercizio 1. (Testo A) *Determina, motivando la risposta, se la funzione* $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x) = \frac{x-2}{x}$$

è iniettiva.

Soluzione 1. (Testo A) La funzione f è iniettiva. Per verificarlo, facciamo vedere che se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$, per cui due elementi distinti del dominio hanno necessariamente immagine distinta. Supponiamo quindi $f(x_1) = f(x_2)$ per qualche $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}^*$; allora

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \frac{x_1-2}{x_1} = \frac{x_2-2}{x_2} \quad &\Longrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x_1} = 1 - \frac{2}{x_2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{2}{x_1} = \frac{2}{x_2} \Longrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

come affermato. □

Esercizio 1. (Testo B) *Determina, motivando la risposta, se la funzione* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *data da*

$$f(x) = \frac{1-4x^2}{x^2+1}$$

è iniettiva.

Soluzione 1. (Testo B) La funzione f non è iniettiva. Per dimostrarlo è sufficiente osservare che assume lo stesso valore su due elementi distinti del dominio: per esempio, $f(-\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{1}{2})$. Più in generale, si ha $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui la funzione è pari. □

Esercizio 2. (Testo A) *Scrivi un vettore di lunghezza 1 ortogonale al vettore* $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$. *Quanti ce ne sono?*

Soluzione 2. (Testo A) Un vettore $\vec{w} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ è ortogonale al vettore $\vec{v}$ se e solo se il loro prodotto scalare si annulla, cioè se e solo se $3a + 2b - c = 0$; di conseguenza i vettori ortogonali a $\vec{v}$ sono tutti e soli i vettori della forma $\vec{w} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + (3a+2b)\vec{k}$, con $a,\, b \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

Per avere un vettore di lunghezza 1 basta dividere $\vec{w}$ per la sua lunghezza, che è $\sqrt{a^2 + b^2 + (3a+2b)^2}$. Quindi esistono infiniti vettori di lunghezza 1 ortogonali a $\vec{v}$: sono tutti e soli i vettori della forma

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + (3a+2b)^2}} \bigl(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + (3a+2b)\vec{k}\bigr)$$

con a, $b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. $\square$

Esercizio 2. (Testo B) *Scrivi un vettore di lunghezza* 1 *ortogonale al piano di equazione* $3x + 2y - z = 3$. *Quanti ce ne sono?*

Soluzione 2. (Testo B) Ricordando che i coefficienti a, b e c dell'equazione cartesiana di un piano identificano le coordinate di un vettore ortogonale al piano, si ottiene immediatamente che tutti i vettori ortogonali al piano dato sono multipli del vettore $\vec{v} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$.

Il vettore $\vec{v}$ ha lunghezza $\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$; quindi un multiplo $c\vec{v}$ di $\vec{v}$ ha lunghezza $|c|\sqrt{14}$. Per ottenere un vettore di lunghezza 1 si deve quindi avere $|c|\sqrt{14} = 1$, cioè $c = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$. Di conseguenza ci sono solo due vettori di lunghezza 1 ortogonali al piano dato: $\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{v} = \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$, e il suo opposto $-\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{v} = -\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{\imath} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$. $\square$

Esercizio 3. (Testo B) *Esiste un* $k \in \mathbb{R}$ *per cui il sistema*

$$\begin{cases} kx + 3y = 3, \\ x - 2y = 2, \end{cases}$$

ammette soluzione? Se pensi che la risposta sia affermativa, indica tutti i valori di k *per cui il sistema ha soluzione, e descrivi le soluzioni; se pensi che la risposta sia negativa, spiega perché.*

Soluzione 3. (Testo B) La matrice dei coefficienti del sistema e il suo vettore dei termini noti si possono rappresentare come

$$\left|\begin{array}{cc|c} k & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right. .$$

Per effettuare una riduzione a scala senza dividere per k (che ci costringerebbe a considerare separatamente il caso $k = 0$), cominciamo con uno scambio di righe:

$$\left|\begin{array}{cc|c} k & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right. \longrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ k & 3 & 3 \end{array}\right. \longrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3+2k & 3-2k \end{array}\right. .$$

Quindi se $k \neq -3/2$ la matrice a scala ottenuta ha 2 pivot e il nostro sistema lineare è equivalente al sistema con (unica) soluzione

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ (3+2k)y = 3 - 2k, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2y = 2 + 2\frac{3-2k}{3+2k} = \frac{12}{3+2k}, \\ y = \frac{3-2k}{3+2k} . \end{cases} \tag{1}$$

Se invece $k = -3/2$ la riduzione a scala è

$$\left|\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right. ,$$

per cui il sistema è impossibile.

Riassumendo, il sistema ammette soluzione per ogni $k \neq -3/2$, e in tal caso le soluzioni sono date da (1). $\square$

SECONDA PARTE

Esercizio 4. (Testo B)

(a) *Scrivi un'equazione cartesiana del piano α passante per il punto $A = (-2, 1, 0)$ e parallelo al piano β di equazione $3x + y - z = 0$.*
(b) *Scrivi delle equazioni parametriche della retta r passante per il punto $B = (3, 2, 5)$ e ortogonale ai piani α e β.*
(c) *Trova le coordinate del punto P intersezione della retta r con il piano α.*

Soluzione 4. (Testo B)

(a) La condizione di parallelismo tra piani si può tradurre nel fatto che le equazioni cartesiane dei due piani devono avere gli stessi coefficienti a, b e c, mentre il passaggio per il punto A significa che le coordinate di A devono soddisfare l'equazione del piano. Quindi un'equazione cartesiana di un piano parallelo al piano β dev'essere della forma $3x + y - z = d$. Le coordinate di A soddisfano questa equazione se e solo se $3(-2) + 1 - 0 = d$, cioè se e solo se $d = -5$, per cui un'equazione cartesiana del piano α è data da $3x + y - z + 5 = 0$.

(b) La condizione che la retta r sia ortogonale ai piani del punto precedente si può soddisfare imponendo che il vettore direttore della retta abbia come coordinate i coefficienti a, b e c dei suddetti piani. Quindi, poiché il punto B deve appartenere alla retta, equazioni parametriche della retta r sono

$$\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 5 - t. \end{cases}$$

(c) Per individuare le intersezioni tra una retta e un piano è sufficiente mettere a sistema le equazioni che li rappresentano e risolvere il sistema così ottenuto. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 5 - t, \\ 3x + y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo i valori di x, y e z dati dalle prime tre equazioni nella quarta si trova

$$3(3 + 3t) + (2 + t) - (5 - t) + 5 = 0 \Longrightarrow 11 + 11t = 0 \Longrightarrow t = -1\ .$$

Sostituendo il valore di $t = -1$ nelle prime tre equazioni troviamo che il punto di intersezione ha coordinate $P = (0, 1, 6)$. □

Esercizio 5. (Testo B) *Bilancia la seguente reazione chimica, risolvendo esplicitamente un sistema lineare:*

$$\mathrm{Al(OH)_3} + \mathrm{H_2CO_3} \longrightarrow \mathrm{Al_2(CO_3)_3} + \mathrm{H_2O}.$$

[Suggerimento: bilanciare questa reazione chimica significa trovare i più piccoli numeri naturali n_1, n_2, n_3 e n_4 per cui si abbia

$$n_1\mathrm{Al(OH)_3} + n_2\mathrm{H_2CO_3} = n_3\mathrm{Al_2(CO_3)_3} + n_4\mathrm{H_2O},$$

dove l'uguaglianza significa che il numero di atomi di ciascun elemento è lo stesso sia a sinistra sia a destra dell'uguale.]

Soluzione 5. (Testo B) Come suggerito, bilanciare la reazione chimica data significa trovare i più piccoli numeri naturali n_1, n_2, n_3 e n_4 per cui si abbia

$$n_1\mathrm{Al(OH)_3} + n_2\mathrm{H_2CO_3} = n_3\mathrm{Al_2(CO_3)_3} + n_4\mathrm{H_2O},$$

dove l'uguaglianza significa che il numero di atomi di ciascun elemento è lo stesso sia a sinistra sia a destra dell'uguale.

Il bilancio dell'alluminio implica $n_1 = 2n_3$, quello dell'ossigeno $3n_1 + 3n_2 = 9n_3 + n_4$, quello dell'idrogeno $3n_1 + 2n_2 = 2n_4$ e infine quello del carbonio $n_2 = 3n_3$; abbiamo quindi il sistema omogeneo

$$\begin{cases} n_1 - 2n_3 = 0, \\ 3n_1 + 3n_2 - 9n_3 - n_4 = 0, \\ 3n_1 + 2n_2 - 2n_4 = 0, \\ n_2 - 3n_3 = 0. \end{cases}$$

Riducendo a scala la matrice associata al sistema otteniamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -9 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & -2 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dunque la matrice a scala ottenuta ha 3 pivot, per cui il sistema omogeneo ha infinite soluzioni, dipendenti da $4 - 3 = 1$ variabile libera. Risolvendo all'indietro troviamo che le soluzioni hanno la forma

$$\begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{vmatrix} = n_4 \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Perché la soluzione sia composta da numeri interi positivi occorre che n_4 sia un multiplo di 6. In particolare, il valore minimo ammissibile di n_4 è $n_4 = 6$, e il bilancio della reazione è dato da

$$2\mathrm{Al(OH)_3} + 3\mathrm{H_2CO_3} \longrightarrow \mathrm{Al_2(CO_3)_3} + 6\mathrm{H_2O}.$$

□

Esercizio 6. (Testo B) *Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ studia (cioè determina per quali valori del parametro ammette soluzione, e in tal caso trova le soluzioni) il sistema lineare:*

$$\begin{cases} -3x + z = 2a, \\ ax + y = 2 + a, \\ -ax + ay = 0, \end{cases}$$

Soluzione 6. (Testo B) La matrice dei coefficienti del sistema e il suo vettore dei termini noti si possono rappresentare come

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 & 2+a \\ -a & a & 0 & 0 \end{array}\right. .$$

Operiamo una riduzione a scala:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ a & 1 & 0 & 2+a \\ -a & a & 0 & 0 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a/3 & 2+a+\frac{2a^2}{3} \\ 0 & a & -a/3 & -\frac{2a^2}{3} \end{array}\right|$$

$$\longrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a/3 & 2+a+\frac{2a^2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{a(a+1)}{3} & -\frac{2a^2}{3}-2a-a^2-\frac{2a^3}{3} \end{array}\right|$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 2a \\ 0 & 1 & a/3 & 2+a+\frac{2a^2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{a(a+1)}{3} & -\frac{a}{3}(2a^2+5a+6) \end{array}\right| .$$

Quindi se $a \neq 0, -1$ abbiamo ottenuto una matrice a scala con 3 pivot, per cui il nostro sistema ha un'unica soluzione, che si ottiene risolvendo all'indietro:

$$\begin{cases} -3x+z=2a, \\ y+\frac{a}{3}z=2+a+\frac{2a^2}{3}, \\ -\frac{a(a+1)}{3}z=-\frac{a}{3}(2a^2+5a+6), \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}z-\frac{2a}{3}=\frac{a+2}{a+1}, \\ y=2+a+\frac{2a^2}{3}-\frac{a}{3}z=\frac{a+2}{a+1}, \\ z=\frac{2a^2+5a+6}{a+1}. \end{cases}$$

Se $a=-1$ la riduzione a scala ci ha fornito la seguente matrice:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| ,$$

per cui il sistema per $a=-1$ è impossibile.

Infine, se $a=0$ la riduzione a scala ci ha fornito la seguente matrice:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| .$$

Quindi la matrice a scala ha 2 pivot, il sistema è compatibile e le (infinite) soluzioni dipendono da $3-2=1$ variabile libera. Infatti, risolvendo all'indietro troviamo

$$\begin{cases} -3x+z=0, \\ y=2, \\ 0=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}z, \\ y=2, \\ z=z, \end{cases}$$

cioè

$$\left|\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right| + z \left|\begin{array}{c} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| .$$

□